

Wang のタイル貼り問題

Wang Tiling Problem (Domino Problem)

y.*

2018 年 3 月 1 日

最終更新日: 2018 年 3 月 11 日

概要

Wang のタイル貼り問題とは, タイル (4 つの辺それぞれに色が塗られた単位正方形) の有限集合 T が与えられたとき, 隣接する辺の色が等しくなるように T の元を並べて全平面を充填できるかという決定問題である (ただし, 同じタイルは何回用いてもよいが, タイルの回転・反転は禁止とする). 本稿ではまず原点に制約の付いたタイル貼り問題の決定不能性を示した後, 制約なしのバージョンの決定不能性も証明し, さらに様々な派生問題の決定可能性について議論する.

Keywords: Wang のタイル貼り問題 (Wang tiling problem, domino problem), Wang タイル (Wang tile), 自己相似的タイル貼り (self-similar tiling), 非周期的タイル貼り (nonperiodic tiling / aperiodic tiling).

目次

1	導入	1
2	制約付きのタイル貼り問題	3
3	制約なしのタイル貼り問題	7
3.1	自己相似的タイル貼り	7
3.2	決定不能性の証明	12
4	タイル貼り問題のバリエーション	15
5	非周期的タイル貼り	17

1 導入

定義 1.1 (タイル, タイル貼り). 本稿においてタイル (tile) とは, 4 つの辺それぞれに色が塗られた単位正方形のことをいう. タイル t の上下左右の辺の色をそれぞれ $\text{Top}(t)$, $\text{Bottom}(t)$, $\text{Left}(t)$, $\text{Right}(t)$ で表すことにする.

* <http://iso.2022.jp/>

T によるタイル貼り (tiling) とは全平面を充填する T の元の配置であって、隣接する辺の色が等しくなるようなものである。抽象的には、平面上の格子点にタイルを割り当てる写像 $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow T$ であって、全ての $x, y \in \mathbb{Z}$ について $\text{Right}(f(x, y)) = \text{Left}(f(x + 1, y)), \text{Top}(f(x, y)) = \text{Bottom}(f(x, y + 1))$ を満たすものと定義される。したがって、本稿では図1のような充填はタイル貼りとは呼ばない。

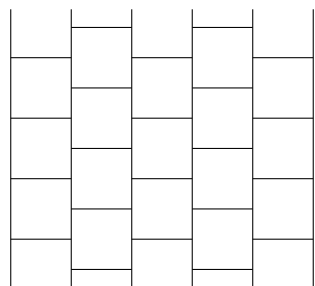


図1: 本稿ではこのような充填の仕方は考えない。

例 1.2. タイル集合 T を $T := \{ \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline c \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline d \\ \hline \end{array} \}$ と定義すると、 T は図2のパターンを繰り返した周期的なタイル貼りを持つ。

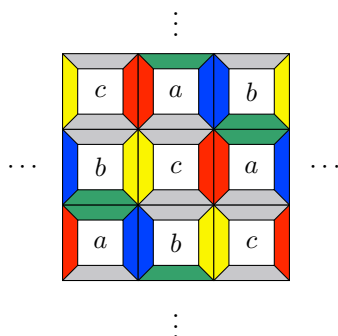


図2: T のタイル貼りの例

一方で $T' := \{ \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline \end{array} \}$ とおくと (a の上, b の下に置けるタイルがないので) T' はタイル貼りを持たない。

注意 1.3. 便宜上「色」という用語を使っているが、実際には区別さえできれば何でもよいので、色の代わりに自然数や文字列を用いても同じことである。

本稿では以下の決定問題を考える。

問題 1.4 (Wang のタイル貼り問題^{*1}(Wang tiling problem, domino problem)).

Input: タイルの有限集合 T

Question: T によるタイル貼りは存在するか?

^{*1} 王浩 (Wáng Hào) は中国出身のアメリカ人の論理学者、哲学者、数学者。

しかしながら、Wang のタイル貼り問題 1.4 の決定不能性を示すのは少し難しいので、ひとまずは次の決定問題を考えることにする。

問題 1.5 (制約付きの Wang のタイル貼り問題 (Wang tiling problem with restricted origin)).

Input: タイルの有限集合 T とその元 $t \in T$

Question: t を原点に置くような T によるタイル貼りは存在するか？

注意 1.6. タイル貼りは平行移動してもタイル貼りなので、「 t を原点に置く」という条件は「 t をどこかで使う」という条件と同じである。

2 制約付きのタイル貼り問題

本節では制約付きの Wang のタイル貼り問題 1.5 の決定不能性を証明する。証明には入力が空文字列 ε のバージョンの停止問題の決定不能性を用いる。停止問題の決定不能性の証明は「Turing 機械の定義と停止問題」[1] を参照のこと。

問題 2.1 (停止問題 (halting problem)).

Input: Turing 機械 M

Question: M は空文字列 ε に対して停止するか？

定理 2.2 (Berger [8], 1966). 制約付きの Wang のタイル貼り問題 1.5 は決定不能である。

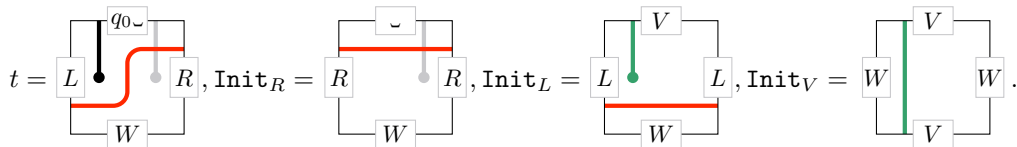
証明. (この証明は新井 [3, 6 章], fujidig [4] を参考にした.)

仮に決定可能であるとすると、停止問題も決定可能になってしまうことを示す。停止問題への入力を $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}})$ とする。このとき、タイル集合 T_M と $t \in T_M$ を

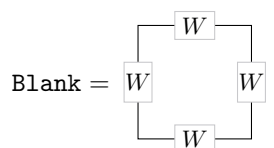
$$M \text{ が空文字列 } \varepsilon \text{ に対して停止しない} \iff T_M \text{ が } t \text{ を原点に置くタイル貼りを持つ} \quad (1)$$

という条件を満たすように構成すればよい。「Post の対応問題」[2] の場合と同様にして、 M は「ヘッドがテープの左端を見ている状態でさらにヘッドを左に動かそうとすることはない」と仮定してよい。このとき T_M を次のように構成する (タイルの模様はわかりやすくするために付けてあるだけで、本来は不要な情報である。必要なのは各辺に付いている記号 (色) だけである。).

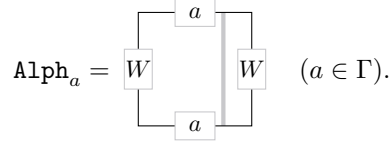
Step 1. まず、原点に置くタイル t を含めた初期タイル (initial tile) $t, \text{Init}_R, \text{Init}_L, \text{Init}_V$ を T_M に加える:



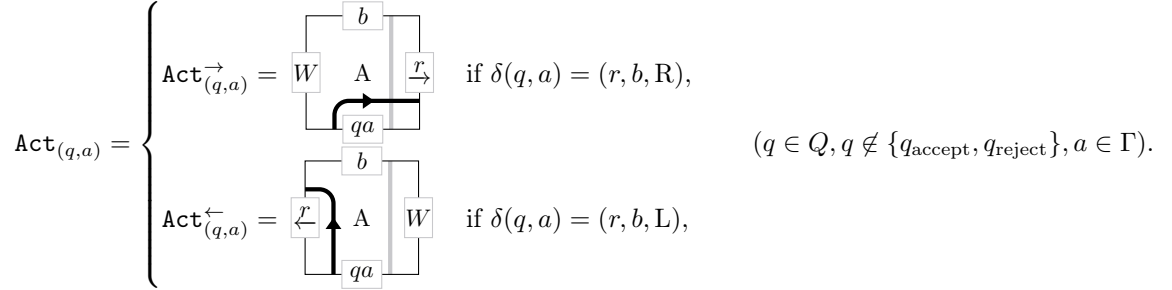
Step 2. 次に空白タイル (blank tile) Blank を T_M に加える。



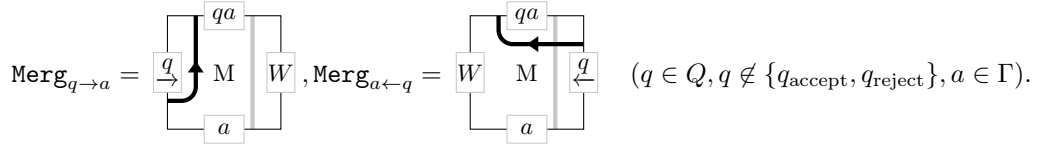
Step 3. 各文字 $a \in \Gamma$ ごとに記号タイル (alphabet tile) Alph_a を T_M に加える.



Step 4. 各状態 $q \in Q$ ($q \notin \{q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}}\}$) と各文字 $a \in \Gamma$ ごとに遷移タイル (action tile) $\text{Act}_{(q,a)}$ を T_M に加える.



Step 5. 最後に, 各状態 $q \in Q$ ($q \notin \{q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}}\}$) と各文字 $a \in \Gamma$ ごとに合流タイル (merging tile) $\text{Merg}_{q \rightarrow a}, \text{Merg}_{a \leftarrow q}$ を T_M に加える.



さて, 今構成した T_M が条件 (1) を満たすことを示そう.

(\Leftarrow) 原点に t を置く T_M のタイル貼りを $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow T_M$ とする (つまり $f(0,0) = t$ である). f の復元を試みよう. t の右側に置けるタイル, すなわち $\text{Left}(\tau) = R$ となるような $\tau \in T_M$ は Init_R しかない. また Init_R の右側に置けるタイルも Init_R しかないから, 結局 t の右側には Init_R が延々と続くしかない ($f(1,0) = f(2,0) = f(3,0) = \dots = \text{Init}_R$). 次に t の左側に置けるタイルは Init_L しかないので, 同様に t の左側には Init_L が延々と続くしかない ($f(-1,0) = f(-2,0) = f(-3,0) = \dots = \text{Init}_L$). さらに Init_L の上に置けるタイルは Init_V しかないので, 各 Init_L の上にはやはり Init_V が延々と続くしかない ($x < 0, y > 0 \implies f(x,y) = \text{Init}_V$). 最後に $t, \text{Init}_R, \text{Init}_L$ の下に置けるタイルは Blank しかないので, 下半平面は Blank で埋め尽くすしかない ($y < 0 \implies f(x,y) = \text{Blank}$).

ここまでで図 3 となり, 第 2, 3, 4 象限は全て埋まった状態になっている.

以下, 「各 $s \geq 0$ について, $M(\varepsilon)$ の計算は s ステップ目の時点でまだ停止しておらず, $(\text{Top}(f(x,s)))_{x=0}^{\infty} = (\text{Top}(f(0,s)), \text{Top}(f(1,s)), \text{Top}(f(2,s)), \dots)$ が $M(\varepsilon)$ の s ステップ目の計算状況を表している」ことを s に関する数学的帰納法で示す.

$s = 0$ のとき, 図 3 より $(\text{Top}(f(x,0)))_{x=0}^{\infty} = (q_{0,\cdot}, \cdot, \cdot, \dots)$ であり, これは $M(\varepsilon)$ の初期状況である. また, t の真上のタイル $f(0,1)$ は遷移タイル $\text{Act}_{(q_0,\cdot)}$ でしかありえないが, $q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}}$ に関する遷移タイルは追加していないので $q_0 \notin \{q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}}\}$ であり, したがって 0 ステップ目では $M(\varepsilon)$ は停止していない.

次に $s = s_0$ で $(\text{Top}(f(x,s_0)))_{x=0}^{\infty}$ が $M(\varepsilon)$ の s_0 ステップ目の計算状況を表しているとする. s_0 ステップ目での状態を q , ヘッドの位置を $p \geq 0$ とすると, $(\text{Top}(f(x,s_0)))_{x=0}^{\infty} =$

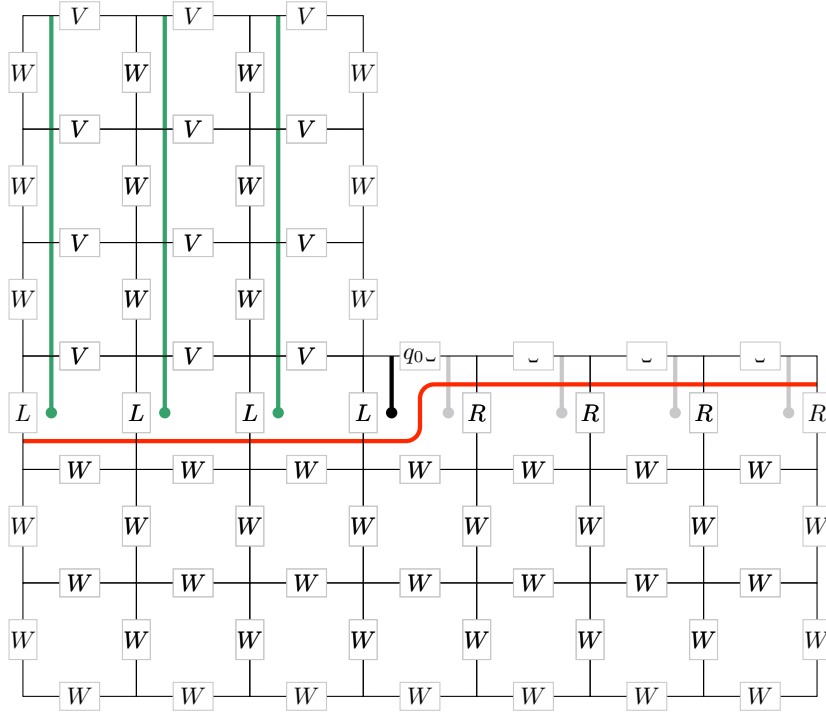


図 3: M によらず T_M から一意的に定まる部分

$(a_0, a_1, \dots, a_{p-1}, qa_p, a_{p+1}, \dots)$ (ここで $a_i \in \Gamma$) となっている。帰納法の仮定から s_0 ステップ目では停止していないので $q \notin \{q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}}\}$ である。 $\text{Top}(f(p, s_0)) = qa_p$ より、その真上のタイル $f(p, s_0 + 1)$ は遷移タイル $\text{Act}_{(q, a_p)}$ しかありえない。 $\delta(q, a_p) = (r, b, D)$ とする。 $D = R$ のとき、遷移タイルの右のタイル $f(p+1, s_0 + 1)$ は合流タイル $\text{Merg}_{r \rightarrow a_{p+1}}$ しかありえない。 $D = L$ のとき、遷移タイルの左のタイル $f(p-1, s_0 + 1)$ は合流タイル $\text{Merg}_{a_{p-1} \leftarrow r}$ しかありえない (M に関する仮定から、このときヘッドは左端ではない ($p \neq 0$) ことに注意する)。 $q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}}$ に関する合流タイルは追加していないので $r \notin \{q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}}\}$ であり、したがって $s_0 + 1$ ステップ目では $M(\varepsilon)$ は停止していない。 さて、 $s_0 + 1$ 段目で、今遷移タイルと合流タイルが置かれた以外の場所 $(x, s_0 + 1)$ に何が置かれているかを考える。 $\text{Top}(f(x, s_0)) = a_x$ だから $f(x, s_0 + 1)$ は記号タイル Alph_{a_x} であるか、またはある $q \in Q$ について合流タイル $\text{Merg}_{q \rightarrow a_x}, \text{Merg}_{a_x \leftarrow q}$ である。 もし仮に $f(x, s_0 + 1) = \text{Merg}_{q \rightarrow a_x}$ だったとすると、その左のタイル $f(x-1, s_0 + 1)$ はある $a \in \Gamma$ について遷移タイル $\text{Act}_{(q, a)}$ となるはずである。 しかしこのとき $\text{Bottom}(\text{Act}_{(q, a)}) = qa \neq a_{x-1} = \text{Top}(f(x-1, s_0))$ となり矛盾するから $f(x, s_0 + 1) \neq \text{Merg}_{q \rightarrow a_x}$ である。 同様にして $f(x, s_0 + 1) \neq \text{Merg}_{a_x \leftarrow q}$ であることもわかり、したがって $f(x, s_0 + 1)$ は記号タイル Alph_{a_x} でなければならない。 以上より、 $(\text{Top}(f(x, s_0 + 1)))_{x=0}^\infty$ はヘッドが右に動くか左に動くかによって

$$(a_0, a_1, \dots, a_{p-1}, b, ra_{p+1}, \dots)$$

または

$$(a_0, a_1, \dots, ra_{p-1}, b, a_{p+1}, \dots)$$

であり、 $s_0 + 1$ ステップ目の $M(\varepsilon)$ の計算状況を表している。

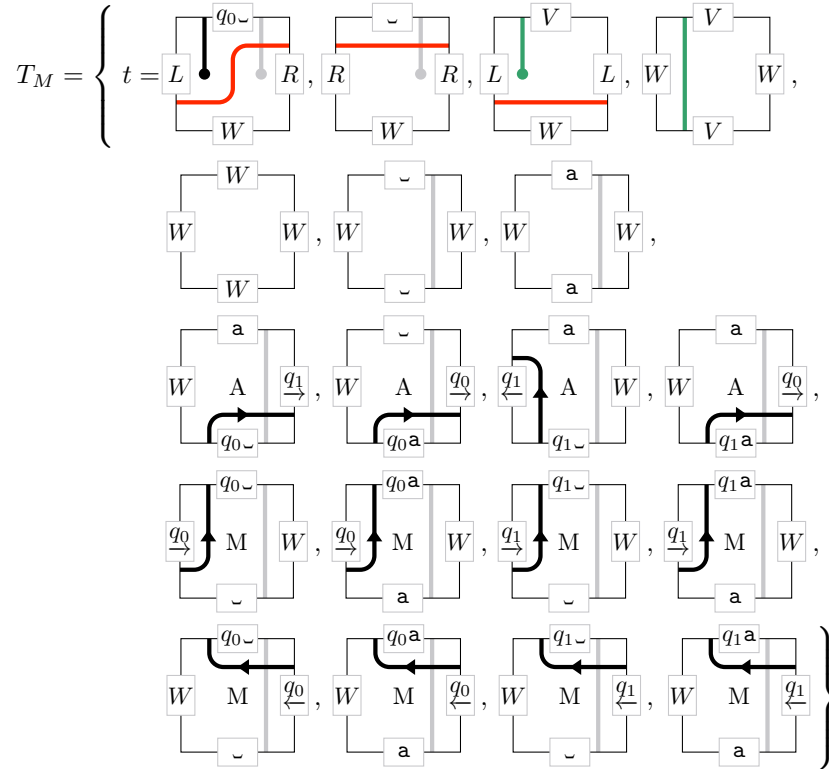
(\implies) まず第 2, 3, 4 象限を図 3 のように埋め, その後は上の証明のようにして $M(\varepsilon)$ の各ステップにおける計算状況を順に敷き詰めていけば全平面を T_M によってタイル貼りできる.*2

以上より, 仮定から T_M が t を原点に置くタイル貼りが存在するかどうかは決定可能なので $M(\varepsilon)$ が停止するかどうかは決定可能である. \square

例 2.3. Turing 機械 $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}})$ を $Q := \{q_0, q_1, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}}\}, \Sigma := \{a\}, \Gamma = \{a, \sqcup\}$,

$$\begin{aligned} \delta(q_0, \sqcup) &= (q_1, a, R), & \delta(q_1, \sqcup) &= (q_1, a, L), \\ \delta(q_0, a) &= (q_0, \sqcup, R), & \delta(q_1, a) &= (q_0, a, R) \end{aligned}$$

とおくと,



となる.

M に空文字列 ε を入力として与えると, δ の定め方から $M(\varepsilon)$ の計算は停止せず,

$$q_0 \sqcup \rightarrow a q_1 \sqcup \rightarrow q_1 a a \rightarrow a q_0 a \rightarrow a \sqcup q_0 \rightarrow a \sqcup a q_1 \rightarrow a \sqcup q_1 a a \rightarrow a \sqcup a q_0 a \rightarrow a \sqcup a \sqcup q_0 \rightarrow \dots$$

のように永遠に続く. この計算を T_M で模倣することにより図 4 のタイル貼りを得る.

注意 2.4. 本稿では「Turing 機械の定義と停止問題」[1] に合わせて片側無限テープの Turing 機械を考えたが, 両側無限テープの Turing 機械で考えると証明が少しだけ簡単になる (Init_V が不要になるため).

*2 第 1 象限と第 2 象限の境界が全て W であることにも注意する.

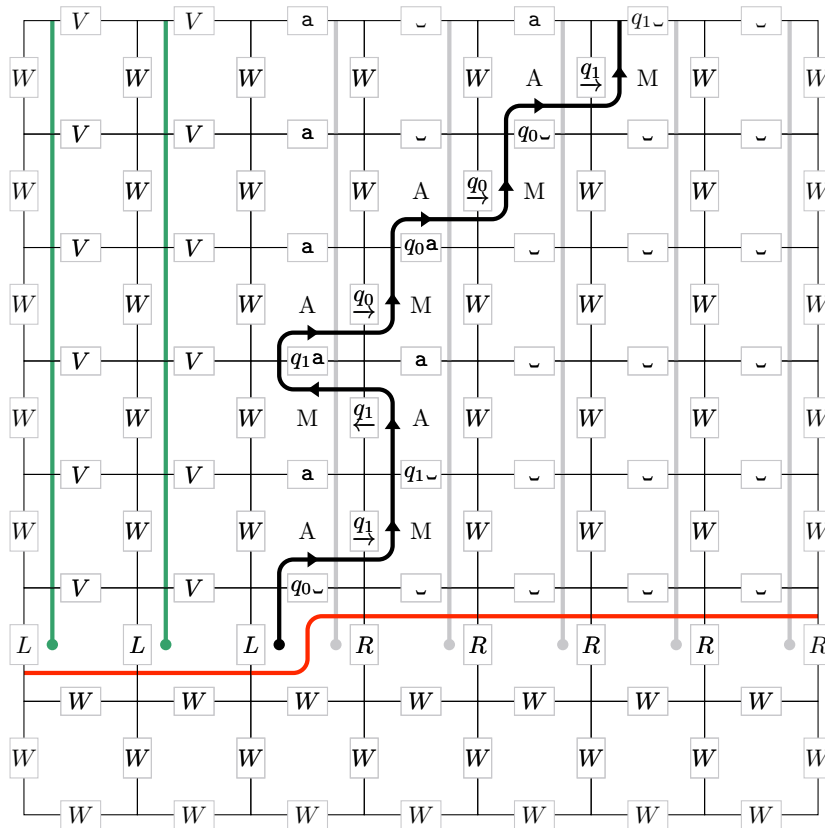


図 4: T_M によるタイル貼り

3 制約なしのタイル貼り問題

本節では制約なしのタイル貼り問題 1.4 の決定不能性を証明する．本節の議論は Taati [5], Robinson [9] を参考に筆者が再構成したものである．

前節の証明で構成した T_M は t を原点に置く制約を外すと明らかに空白タイル Blank のみでタイル貼りできてしまう．したがって， t を原点に置くという制約がない状況でもタイル貼りによって強制的に M の計算をシミュレートさせる必要がある．

3.1 自己相似的タイル貼り

原点にどのタイルを置いたとしても M の計算をシミュレートさせるために，まず自己相似的タイル貼り (self-similar tiling) のみを持つタイル集合 T_S を構成する．ここではわかりやすさのため，4 つの層 (layer) に分けて構成する．

第1の層は以下のタイルからなる。

$$T_{\text{Ground}} = \left\{ X_{00} = \begin{array}{c} \triangle \\ \square \\ \nabla \end{array} \triangleright, X_{10} = \begin{array}{c} \blacktriangle \\ \square \\ \blacktriangledown \end{array} \triangleleft, X_{01} = \begin{array}{c} \nabla \\ \square \\ \triangle \end{array} \blacktriangleright, X_{11} = \begin{array}{c} \blacktriangledown \\ \square \\ \blacktriangle \end{array} \blacktriangleleft \right\}.$$

T_{Ground} は明らかに $\begin{array}{|c|c|} \hline X_{01} & X_{11} \\ \hline X_{00} & X_{10} \\ \hline \end{array}$ を繰り返す周期的なタイル貼りしか持たない。

第2の層は Cross と Arm という2種類のタイルからなる。

$$T_{\text{Arrow}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cross} = \begin{array}{c} \uparrow \\ \leftarrow \text{---} \text{---} \text{---} \rightarrow \\ \downarrow \end{array}, \text{Arm}(\rightarrow) = \begin{array}{c} \downarrow \\ \rightarrow \text{---} \text{---} \text{---} \rightarrow \\ \uparrow \end{array}, \text{Arm}(\uparrow) = \begin{array}{c} \uparrow \\ \rightarrow \text{---} \text{---} \text{---} \leftarrow \\ \uparrow \end{array}, \\ \text{Arm}(\leftarrow) = \begin{array}{c} \downarrow \\ \leftarrow \text{---} \text{---} \text{---} \leftarrow \\ \uparrow \end{array}, \text{Arm}(\downarrow) = \begin{array}{c} \downarrow \\ \rightarrow \text{---} \text{---} \text{---} \leftarrow \\ \downarrow \end{array} \end{array} \right\}.$$

第3の層は緑色の線のパターンからなる。

$$T_{\text{Green}} = \left\{ \begin{array}{l} G(\lfloor) = \begin{array}{c} | \circ \\ \square \\ \circ \end{array}, G(\lrcorner) = \begin{array}{c} \circ | \\ \square \\ \circ \end{array}, G(\ulcorner) = \begin{array}{c} \circ \\ \square \\ | \circ \end{array}, G(\rceil) = \begin{array}{c} \circ \\ \square \\ | \circ \end{array}, \\ G(\circ|) = \begin{array}{c} \circ | \\ \square \\ \circ | \end{array}, G(\bar{\circ}) = \begin{array}{c} \circ \\ \square \\ \bar{\circ} \end{array}, G(|\circ) = \begin{array}{c} | \circ \\ \square \\ | \circ \end{array}, G(\underline{\circ}) = \begin{array}{c} \circ \\ \square \\ \underline{\circ} \end{array}, \\ G(\circ) = \begin{array}{c} \circ \\ \square \\ \circ \end{array} \end{array} \right\}.$$

第4の層は第3の層と全く同様の赤色の線のパターンからなる。

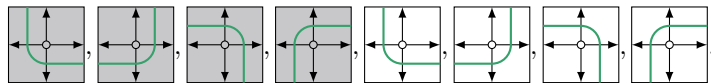
$$T_{\text{Red}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{R(L)} = \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \square \\ \bullet \end{array}, \text{R(J)} = \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \square \\ \bullet \end{array}, \text{R(┐)} = \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \square \\ \bullet \end{array}, \text{R(┌)} = \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \square \\ \bullet \end{array}, \\ \text{R(●|)} = \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \square \\ \bullet \end{array}, \text{R(●\bar{○})} = \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \square \\ \bullet \end{array}, \text{R(|●)} = \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \square \\ \bullet \end{array}, \text{R(○\underline{●})} = \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \square \\ \bullet \end{array}, \\ \text{R(●)} = \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \square \\ \bullet \end{array} \end{array} \right\}.$$

今定義した $T_{\text{Ground}}, T_{\text{Arrow}}, T_{\text{Green}}, T_{\text{Red}}$ をうまく“重ねて”, 新しいタイル集合 T_S を作りたい. タイル τ_1 の上にタイル τ_2 を重ねてできるタイルを $\tau_2 \boxtimes \tau_1$ と表すことにしよう. 3つ重ねる場合は $\tau_3 \boxtimes \tau_2 \boxtimes \tau_1$, 4つ重ねる場合は $\tau_4 \boxtimes \tau_3 \boxtimes \tau_2 \boxtimes \tau_1$ である. たとえば

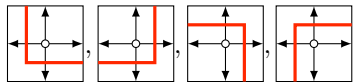
$$\text{R(●)} \boxtimes \text{G(\bar{○})} \boxtimes \text{Arm(\uparrow)} \boxtimes \text{X}_{01} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \nearrow \\ \square \\ \searrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \bar{\circ} \\ \square \\ \bar{\circ} \end{array} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ \square \\ \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \blacktriangle \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} (|\bullet, \bar{\circ}, \uparrow, \nabla) \\ \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \\ (\bullet, \bar{\circ}, \leftarrow, \blacktriangleright) \\ (|\bullet, \bar{\circ}, \uparrow, \Delta) \end{array}$$

である. したがって, 重なったタイル同士を隣接させてよいのは全ての層の辺の色が等しいときだけである. この表記を用いて, タイル集合 T_S を次のように構成する.

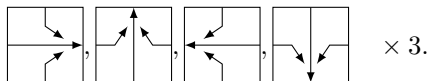
Step 1. 各 $g \in \{\text{L}, \text{J}, \text{┐}, \text{┌}\}, x \in \{00, 11\}$ に対し, $\text{R(●)} \boxtimes \text{G}(g) \boxtimes \text{Cross} \boxtimes \text{X}_{00}$ を T_S に加える.



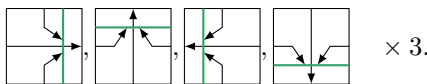
Step 2. 各 $r \in \{\text{L}, \text{J}, \text{┐}, \text{┌}\}$ に対し, $\text{R}(r) \boxtimes \text{G}(\bar{\circ}) \boxtimes \text{Cross} \boxtimes \text{X}_{11}$ を T_S に加える.



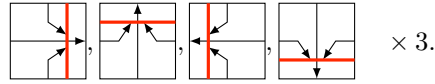
Step 3. 各 $a \in \{\rightarrow, \uparrow, \leftarrow, \downarrow\}, x \in \{10, 01, 11\}$ に対し, $\text{R(●)} \boxtimes \text{G}(\bar{\circ}) \boxtimes \text{Arm}(a) \boxtimes \text{X}_x$ を T_S に加える.



Step 4. 各 $(g, a) \in \{(\bar{\circ}, \rightarrow), (\bar{\circ}, \uparrow), (\bar{\circ}, \leftarrow), (\bar{\circ}, \downarrow)\}, x \in \{10, 01, 11\}$ に対し, $\text{R(●)} \boxtimes \text{G}(g) \boxtimes \text{Arm}(a) \boxtimes \text{X}_x$ を T_S に加える.



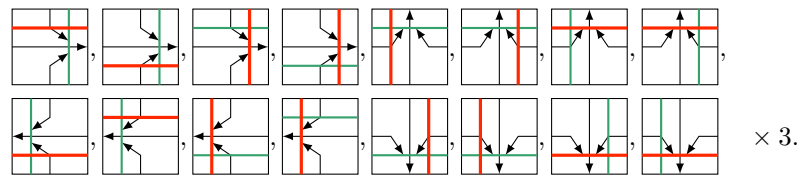
Step 5. 各 $(r, a) \in \{(\bullet, \rightarrow), (\bar{\bullet}, \uparrow), (|\bullet, \leftarrow), (\bullet, \downarrow)\}, x \in \{10, 01, 11\}$ に対し, $R(r) \boxtimes G(o) \boxtimes \text{Arm}(a) \boxtimes X_x$ を T_S に加える.



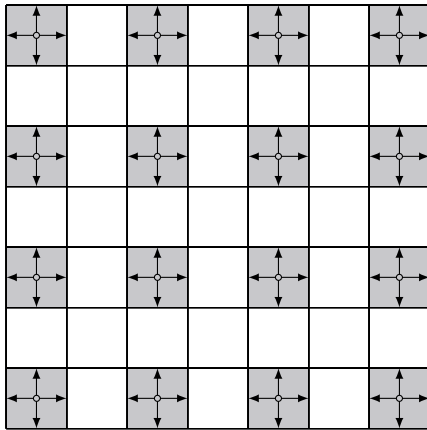
Step 6. 各

$(r, g, a) \in \{(\bar{\bullet}, |o, \rightarrow), (\bullet, |o, \rightarrow), (\bullet, \bar{o}, \rightarrow), (\bullet, |o, \rightarrow), (|\bullet, \bar{o}, \uparrow), (\bullet, \bar{o}, \uparrow), (\bar{\bullet}, |o, \uparrow), (\bar{\bullet}, |o, \uparrow), (\bullet, |o, \leftarrow), (\bar{\bullet}, |o, \leftarrow), (|\bullet, |o, \leftarrow), (|\bullet, \bar{o}, \leftarrow), (\bullet, |o, \downarrow), (|\bullet, |o, \downarrow), (\bullet, |o, \downarrow), (\bullet, |o, \downarrow)\}$

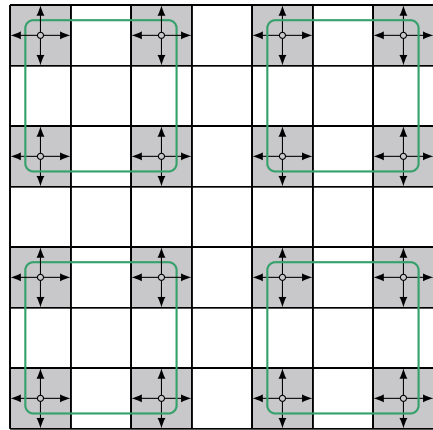
と $x \in \{10, 01, 11\}$ に対し, $R(r) \boxtimes G(g) \boxtimes \text{Arm}(a) \boxtimes X_x$ を T_S に加える.



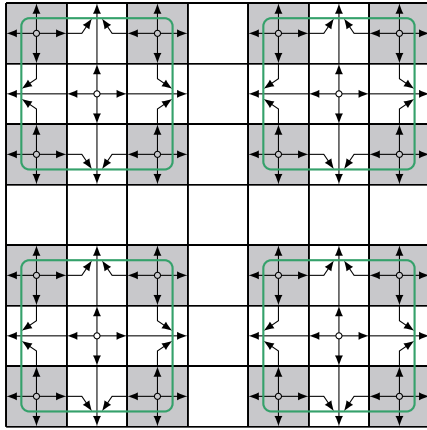
今構成した T_S がどのようなタイル貼りを持つかを考えよう. まず第1の層を考えると, 図 5a のようにならざるを得ない. 第1の層が X_{00} であるような T_S のタイルは Step 1 で加えたタイルしかないので, 緑色の角をつなげようと思うと図 5b のように 3×3 の緑色の正方形のパターンを繰り返すしかない. 3×3 の正方形の辺の部分には Step 4 か Step 6 で加えたタイルを用いるしかないので図 5c のようになる. このとき $\text{Cross} \boxtimes X_{11}$ の上には緑色の角か赤色の角が重ならなければならないが, 緑色の線同士は交わることはできないから図 5d のように 5×5 の赤色の正方形を形成するしかない. 第2の層を考えると, 5×5 の赤色の正方形の中心には Step 5 で加えたタイルを用いるしかないので図 5e のようになる. さらに第2の層を考えると図 5f のようにならざるを得ない.



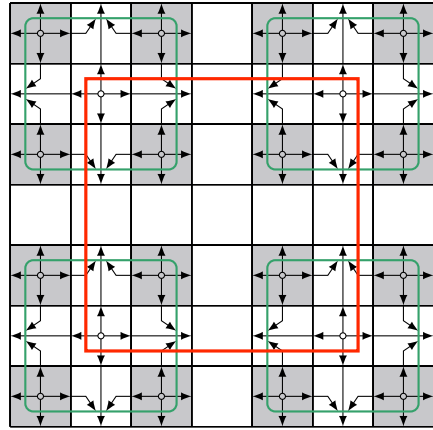
(a) 第1の層を考える



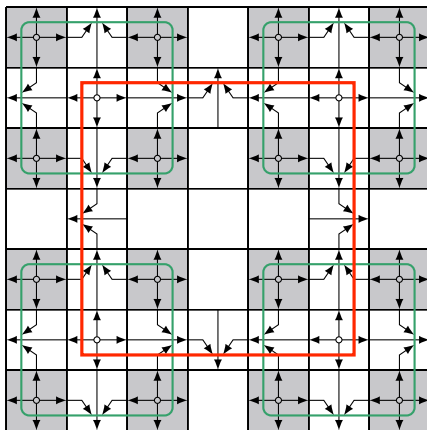
(b) 第3の層を考える



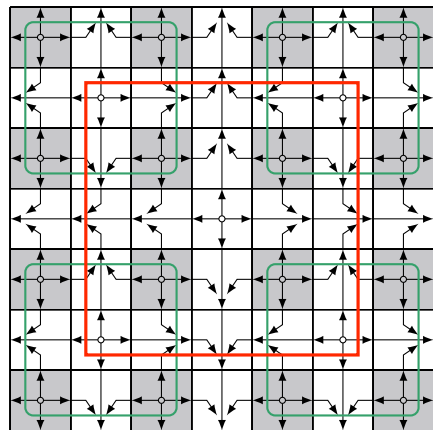
(c) 第2の層を考える



(d) 第4の層を考える



(e) 再び第2の層を考える



(f) さらに第2の層を考える

図 5: T_S によるタイル貼りの形成

図 5f の中央の Cross は緑色の角か赤色の角であるが、先程と同様に赤色の線同士は交われないので緑色の角にならざるを得ない。以上の議論を繰り返すことで、最終的に図 6 のようなタイル貼りを得る。

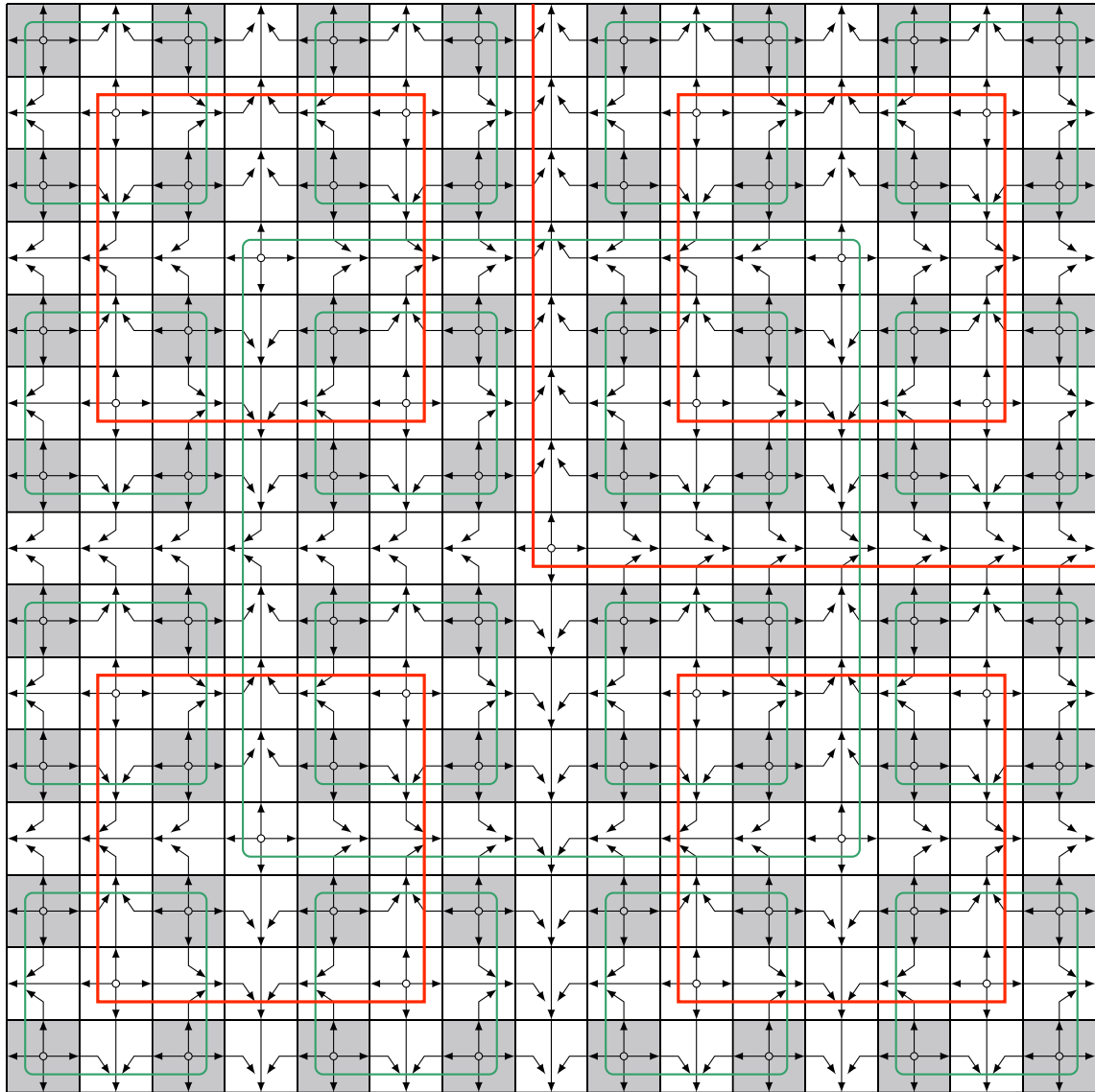


図 6: T_S によるタイル貼りの完成

T_S のタイル貼りに現れる緑色の正方形のサイズは $3 \times 3, 9 \times 9, 33 \times 33, \dots, (2^{2n-1} + 1) \times (2^{2n-1} + 1), \dots$ であり、同様に赤色の正方形のサイズは $5 \times 5, 17 \times 17, 65 \times 65, \dots, (2^{2n} + 1) \times (2^{2n} + 1), \dots$ である。したがって特に、 T_S のタイル貼りはいくらかでも大きな正方形を含まなければならず、周期的ではありえない。すなわち、 T_S はタイル貼りを持つけれども、周期的なタイル貼りを持たないようなタイル集合になっているのである。言い換えれば、 T_S は非周期的 (nonperiodic, aperiodic) なタイル貼りしか持たない。

3.2 決定不能性の証明

定理 3.1 (Berger [8], 1966). Wang のタイル貼り問題 1.4 は決定不能である。

証明のアイデア。制約付きのタイル貼り問題 1.5 では原点に置くタイルが決まっていたため、Turing 機械の計

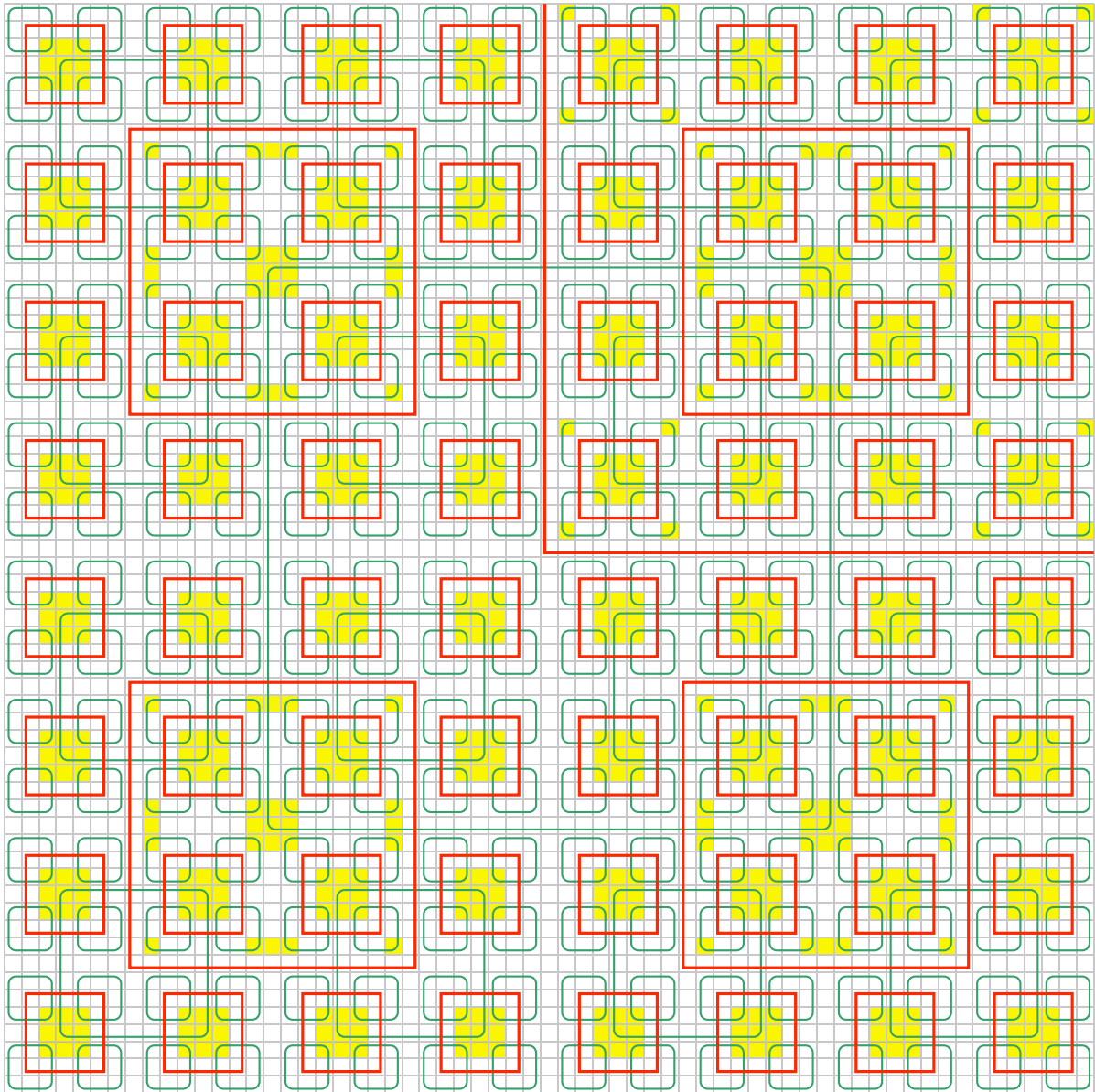


図 7: 自由セル (黄色で示した)

算のシミュレーションを原点から始めることができた。一方で、何の制約もなしに特定のタイルをちょうど 1 箇所だけに置かせることはかなり難しい。そこで、Turing 機械のシミュレーションを 1 つだけ走らせるのではなく、 T_S のタイル貼りに現れる全ての赤色の正方形の内部で Turing 機械の計算を有限ステップだけシミュレートするのである。 T_S のタイル貼りにいくらかでも大きな正方形が現れることより、Turing 機械の計算のシミュレーションはいくらでも多くのステップ行われていることになる。すなわち、Turing 機械の計算は停止しない。

しかしながら、 T_S のタイル貼りに現れる赤色の正方形は入れ子になっており、より小さな赤色の正方形を内部に含んでいる。したがって、1 つの赤色の正方形がシミュレーションに使うことのできるタイルは図 7 に示すような自由セル (free cell) に限られる。このとき赤色の大きな正方形では自由セルは連続しておらず飛び

飛びになっているため、自由でないセルは自由セルの辺の色を伝播させる必要がある。これを実現するために、各々の赤色の辺は「自由でない」という信号 \circ を外側に向かって“射出”する。この信号を右（または左）から受信したタイルは、自由セルの辺の色を伝播させるために上下の辺の色を同じにしなければならない。上（または下）から受信した場合も同様である。 \square

証明. 停止問題の入力の Turing 機械を M とし、定理 2.2 の証明で構成した T_M をとる。 T_M から t と Init_R 以外の初期タイルおよび空白タイルを除いた集合を $T'_M := T_M \setminus \{\text{Init}_L, \text{Init}_V, \text{Blank}\}$ とおく。また、 T'_M に現れる色の全体を C とおく。 $\circ \notin C$ である。タイル集合 T を以下のように構成する。

Step 1. 各 $c \in C \cup \{\circ\}$ に対し、

- 第 4 の層が $R(\bullet)$ であるような $\tau \in T_S$ に対しては $c \begin{array}{c} B \\ \square \\ B \end{array} \circ \boxtimes \tau$ を、
- 第 4 の層が $R(\blacktriangleright)$ であるような $\tau \in T_S$ に対しては $B \begin{array}{c} \square \\ c \end{array} B \boxtimes \tau$ を、
- 第 4 の層が $R(|\bullet)$ であるような $\tau \in T_S$ に対しては $\circ \begin{array}{c} \square \\ B \end{array} c \boxtimes \tau$, $\circ \begin{array}{c} B \\ \square \\ I \end{array} L \boxtimes \tau$ を、
- 第 4 の層が $R(\bullet)$ であるような $\tau \in T_S$ に対しては $B \begin{array}{c} \square \\ c \\ \square \end{array} B \boxtimes \tau$ を

それぞれ T に加える。

Step 2. • 第 4 の層が $R(\perp)$ であるような $\tau \in T_S$ に対しては $\circ \begin{array}{c} I \\ \square \\ \square \end{array} B \boxtimes \tau$ を、

- 第 4 の層が $R(\perp)$ であるような $\tau \in T_S$ に対しては $B \begin{array}{c} B \\ \square \\ \square \end{array} \circ \boxtimes \tau$ を、
- 第 4 の層が $R(\ulcorner)$ であるような $\tau \in T_S$ に対しては $B \begin{array}{c} \square \\ B \end{array} \circ \boxtimes \tau$ を、
- 第 4 の層が $R(\lrcorner)$ であるような $\tau \in T_S$ に対しては $\circ \begin{array}{c} \square \\ B \end{array} B \boxtimes \tau$ を

それぞれ T に加える。

Step 3. 各 $c \in C$ と、第 4 の層が $R(\bullet)$ であるような $\tau \in T_S$ に対し、 $\circ \begin{array}{c} c \\ \square \\ c \end{array} \circ \boxtimes \tau$, $c \begin{array}{c} \square \\ c \end{array} \circ \boxtimes \tau$ を T に加える。

Step 4. 各 $\sigma \in T'_M$ と、第 4 の層が $R(\bullet)$ であるような $\tau \in T_S$ に対し、 $\sigma \boxtimes \tau$ を T に加える。

このように T を定めると、図 8 のように左下の自由セルから $M(\varepsilon)$ の計算のシミュレーションが行われる。

$(2^{2n}+1) \times (2^{2n}+1)$ の赤色の正方形に含まれる自由セルの数は $(2^n+1) \times (2^n+1)$ であり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n+1 = \infty$

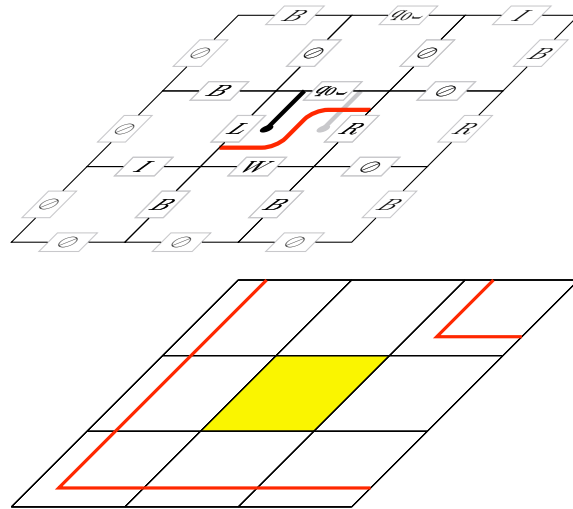


図 8: 赤色の正方形における Turing 機械のシミュレーション

なので T がタイル貼りを持てば $M(\varepsilon)$ の計算は停止しない.*³

逆に $M(\varepsilon)$ の計算が停止しなければ T がタイル貼りを持つことは明らかであろう。 □

4 タイル貼り問題のバリエーション

Wang のタイル貼り問題を見て、なぜ回転や反転を許さないのか疑問に思った読者もいるかもしれない。回転・反転が禁止している理由はひとえに「回転または反転を許すと 1 枚のタイルでタイル貼りできてしまうから」ということによる (図 9).^{*4}

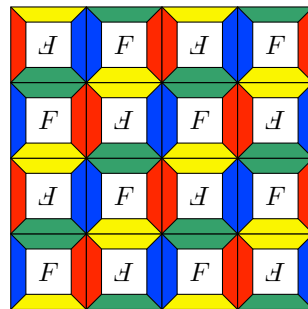


図 9: 180° 回転または上下左右の反転を許すと 1 つのタイルでタイル貼りできてしまう

タイル貼り問題は単位正方形による充填を考える問題であり、いわば“2次元”の問題である。正方形を区間や立方体に変えることにより 1次元バージョンや 3次元バージョンの派生問題を作ることができる。

*³ ここでシミュレーションに使われる自由セルの個数が縦方向と横方向で一致していることは重要である。もし仮に横方向よりも縦方向の方が数が多かったとすると、 M がヘッドを右へ動かし続けた場合にテープが足りなくなり、シミュレーションが途中で途切れてしまう。自由セルが縦方向に h 個、横方向に w 個あったとすると、シミュレーションが正しく行われるのは $(\min\{h, w\} - 1)$ ステップまでである。

*⁴ 「上下を反転してから左右を反転する」と「180° 回転する」ことは同じことである。

問題 4.1 (1次元のタイル貼り問題 (1-dimensional tiling problem)).

Input: 両端に色が塗られた単位区間の有限集合 T

Question: 隣接する端点の色が等しくなるように T の元を並べて数直線を充填できるか?

定理 4.2. 1次元のタイル貼り問題は決定可能である.

証明の概要. $s, t \in T$ に対し, s の右に t を置くことができる ($\text{Right}(s) = \text{Left}(t)$) ときに s から t へ辺を張ることで T を頂点集合とする有限有向グラフ G_T ができる. このグラフ G_T が有向閉路を持つか調べればよい. □

問題 4.3 (3次元のタイル貼り問題 (3-dimensional tiling problem)).

Input: 6つの面それぞれに色が塗られた単位立方体の有限集合 T

Question: 隣接する面の色が等しくなるように T の元を並べて3次元空間全体を充填できるか?

定理 4.4. 3次元のタイル貼り問題は決定不能である.

証明. 仮に決定可能であるとすると, もとの2次元のタイル貼り問題 1.4 も決定可能となってしまうことを示す. Wang のタイル貼り問題の入力 T をとる. T に現れない新しい色 c をとる. このとき

$$T_3 := \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{c} c \\ \text{---} \\ w \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ s \quad \text{---} \\ \text{---} \\ e \\ \text{---} \\ c \end{array} \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{c} n \\ \text{---} \\ w \quad \text{---} \\ \text{---} \\ s \quad \text{---} \\ \text{---} \\ e \end{array} \in T \end{array} \right\}$$

とおけば,

$$T \text{ がタイル貼りを持つ} \iff T_3 \text{ が3次元のタイル貼りを持つ}$$

となる. □

ここでいくつか簡単にわかることを注意しておく.

- 入力に使ってよい色の数を制限すると直ちに決定可能になる. なぜなら, n 色で作れるタイルは 4^n 通りしかなく, したがってそれらのタイルから作られる有限集合も 2^{4^n} 通りしかない. 入力が有限通りしかないので, 決定可能である.
- 同様に, 入力されるタイルの数を制限しても決定可能である. 実際, T が n 個のタイルからなる集合とすると, T に使われている色は高々 $4n$ 種類しかない. 色の名前は本質的ではないので, 色を自然数で置き換えることで T に使われている全ての色は $\{1, 2, \dots, 4n\}$ に含まれるとしてよい. したがって先程の議論から決定可能となる.
- 「上下反転のみ可」は1次元の場合と同様にして決定可能である.

タイル貼り問題では正方形, つまり正四角形の充填を問うているが, これを正六角形や正三角形にしたバージョンも考えることができる. ただし, 回転は禁止だったので正三角形の場合には上向きと下向きの正三角形を別々に用意するものとする.

問題 4.5 (正六角形のタイル貼り問題 (hexagonal tiling problem)).

Input: 6つの辺それぞれに色が塗られた正六角形の有限集合 T

Question: 隣接する辺の色が等しくなるように T の元を並べて全平面を充填できるか?

問題 4.6 (正三角形のタイル貼り問題 (triangular tiling problem)).

Input: 3つの辺それぞれに色が塗られた上向きの正三角形の集合 T_Δ と下向きの正三角形の集合 T_∇

Question: 隣接する辺の色が等しくなるように T_Δ, T_∇ の元を並べて全平面を充填できるか?

定理 4.7. 正六角形, 正三角形のタイル貼り問題はどちらも決定不能である.

証明. 正四角形のタイル貼り問題 1.4 の入力 T とする. 色 c を1つ固定する. このとき,

$$T_6 := \left\{ \left(\begin{array}{c} c \quad n \\ \diagdown \quad \diagup \\ w \quad e \\ \diagup \quad \diagdown \\ s \quad c \end{array} \middle| w \begin{array}{c} n \\ \square \\ s \end{array} e \in T \right), \right.$$

$$T_\Delta := \left\{ \left(w \begin{array}{c} \triangle \\ s \end{array} t \middle| t = w \begin{array}{c} n \\ \square \\ s \end{array} e \in T \right), \right.$$

$$T_\nabla := \left\{ \left(t \begin{array}{c} \nabla \\ e \end{array} n \middle| t = w \begin{array}{c} n \\ \square \\ s \end{array} e \in T \right) \right\}$$

とおけば

$$T \text{ がタイル貼りを持つ} \iff T_6 \text{ がタイル貼りを持つ} \\ \iff T_\Delta, T_\nabla \text{ がタイル貼りを持つ}$$

となる. □

双曲平面のタイル貼り問題は決定不能 (Robinson (1978), Margenstern (2008))

5 非周期的タイル貼り

決定問題とは関係のない話ではあるが, 本稿では小節 3.1 において自己相似的タイル貼りの副産物として「非周期的なタイル貼りのみを持つタイル集合」の存在が得られた.*5このようなタイル集合でできるだけ個数が少ないものを作るという試みもある. 本稿では証明することはしないが, 結果だけ載せておくことにする.

- Berger [8] (1966) 20426 個
- Kari [10] (1996) 17 個
- Culik [11] (1996) 13 個
- Jeandel and Rao [12] (2015) 11 個

特に, Jeandel and Rao [12] では 11 個が最小であること (すなわち, 10 個以下のタイル集合では非周期的なタイル貼りのみを持つことはできない) を主張している.

参考文献

- [1] y., Turing 機械の定義と停止問題 (2018), <http://iso.2022.jp/math/undecidable-problems/files/turing-machine-and-the-halting-problem.pdf>.

*5 小節 3.1 の構成において, 非周期的なタイル貼りを構成するだけであれば, 緑色と赤色の線を区別する必要はない.

- [2] y., Post の対応問題 (2018), <http://iso.2022.jp/math/undecidable-problems/files/post-correspondence-problem.pdf>.
- [3] 新井敏康, 数学基礎論, 岩波書店, 2011.
- [4] fujidig, 決定不能問題 特にタイル貼り問題 (2016), <https://fujidig.github.io/articles/201609-tilingproblem.pdf>.
- [5] Siamak Taati, Wang tiles (2006), <https://siamak.isoperimetric.info/articles/tilings06.pdf>.
- [6] 松井宏樹, 非周期的なタイル張りについて (2006), <http://www.math.s.chiba-u.ac.jp/~matui/0611opencampus.ppt>. (オープンキャンパスにおける模擬授業のスライド)
- [7] H. Wang, Proving theorems by pattern recognition—II, *Bell. Syst. Tech. J.* **40** no. 1 (1961) 1–41, <https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1961.tb03975.x>.
- [8] R. Berger, The undecidability of the domino problem, *Mem. Amer. Math. Soc.* **66** (1966) 72, <https://doi.org/10.1090/memo/0066>.
- [9] R. M. Robinson, Undecidability and nonperiodicity for tilings of the plane, *Invent. Math.* **12** (1971) 177–209, <https://doi.org/10.1007/BF01418780>.
- [10] J. Kari, A small aperiodic set of Wang tiles, *Discrete Math.* **160** no. 1–3 (1996) 259–264, [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(95\)00120-L](https://doi.org/10.1016/0012-365X(95)00120-L).
- [11] K. Culik II, An aperiodic set of 13 Wang tiles, *Discrete Math.* **160** no. 1–3 (1996) 245–251, [https://doi.org/10.1016/S0012-365X\(96\)00118-5](https://doi.org/10.1016/S0012-365X(96)00118-5).
- [12] E. Jeandel, M. Rao, An aperiodic set of 11 Wang tiles (2015), <http://arxiv.org/abs/1506.06492v1>.

変更履歴

- 2018/03/01 公開
- 2018/03/11 微修正