半 Thue 系
Semi-Thue System

y.[*]

2018 年 8 月 1 日

最終更新日: 2018 年 8 月 1 日

概要

半 Thue 系とは，文字列の書き換え規則 $u \longrightarrow v$ の有限集合 S のことをいう．半 Thue 系 S が与えられると，文字列 w_1 に書き換え規則を次々に適用していって別の特定の文字列 w_2 を生成することができるか？ のような決定問題を考えることができる．本稿では，半 Thue 系にまつわる各種の決定問題がことごとく決定不能であることを証明する．

Keywords: 半 Thue 系 (semi-Thue system), Thue 系 (Thue system), 書き換え規則 (rewriting rule), 到達可能性問題 (accessibility problem).

1 半 Thue 系の定義と例

定義 1.1 (半 Thue 系). Σ をアルファベット (有限集合) とする．Σ 上の**半 Thue 系** (semi-Thue system) S とは，Σ 上の文字列の組の有限集合のことを言う．半 Thue 系の元 $(u, v) \in S$ のことを**書き換え規則** (rewriting rule) と呼び，$u \longrightarrow v$ で表す．文字列 w が u を部分文字列として含むとき，S のある書き換え規則 $u \longrightarrow v$ によって w 中の u を v に書き換えた文字列 w' が得られることを $w \underset{S}{\rightarrow} w'$ で表す．すなわち，x, y を任意の文字列とするとき，$xuy \underset{S}{\rightarrow} xvy$ である．文字列 w に $\underset{S}{\rightarrow}$ を 0 回以上適用して w' に到達できることを $w \overset{*}{\underset{S}{\rightarrow}} w'$ で表し，そのときの文字列の列 $w = w_0 \underset{S}{\rightarrow} w_1 \underset{S}{\rightarrow} \cdots \underset{S}{\rightarrow} w_l = w'$ を $w \overset{*}{\underset{S}{\rightarrow}} w'$ の**導出** (derivation) と呼ぶ．[*1]

対称的な半 Thue 系 S (すなわち，任意の文字列 $x, y \in \Sigma^*$ に対して $(x, y) \in S \implies (y, x) \in S$ となるもの) を特に **Thue 系** (Thue system) という．[*2]

例 1.2. $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, S = \{\, \mathtt{aba} \longrightarrow \mathtt{b}, \mathtt{ba} \longrightarrow \mathtt{abba} \,\}$ とおく．このとき，例えば

$$\begin{aligned} \mathtt{a\underline{ba}} &\underset{S}{\rightarrow} \mathtt{aab\underline{ba}} && (\mathtt{ba} \longrightarrow \mathtt{abba} \text{ を適用}) \\ &\underset{S}{\rightarrow} \mathtt{a\underline{aba}bba} && (\mathtt{ba} \longrightarrow \mathtt{abba} \text{ を適用}) \\ &\underset{S}{\rightarrow} \mathtt{abbba} && (\mathtt{aba} \longrightarrow \mathtt{b} \text{ を適用}) \end{aligned}$$

---

[*] `http://iso.2022.jp/`

[*1] 「w に $\underset{S}{\rightarrow}$ を 0 回適用して w' に到達できる」とは $w = w'$ ということである．この $\overset{*}{\underset{S}{\rightarrow}}$ を $\underset{S}{\rightarrow}$ の**反射推移閉包** (reflexive transitive closure) または **Kleene 閉包** (Kleene closure) という．

[*2] つまり，Thue 系とは半群の生成元の間の関係式のことである．

となるので $\mathtt{aba} \xrightarrow[S]{*} \mathtt{abbba}$ である (下線はその部分に書き換え規則を適用することを表す)．他にも $\mathtt{ab\underline{ba}} \xrightarrow[S]{} \mathtt{\underline{aba}bba} \xrightarrow[S]{} \mathtt{bbba}$ から $\mathtt{abba} \xrightarrow[S]{*} \mathtt{bbba}$ であることがわかる．

一方で，S の規則を用いて ababababa から abb を導出することはできない．なぜなら，S には b の個数を減少させるような書き換え規則がないからである．

半 Thue 系に関して，様々な決定問題を考えることができる．代表的なものを以下に示す．

問題 1.3 (到達可能性問題 (accessibility problem; ACP)).

Input: 半 Thue 系 S と文字列 w_1, w_2 [*3]

Question: $w_1 \xrightarrow[S]{*} w_2$ か？

問題 1.4 (Thue 系の到達可能性問題 (accessibility problem for Thue systems)).

Input: Thue 系 S と文字列 w_1, w_2

Question: $w_1 \xrightarrow[S]{*} w_2$ か？

問題 1.5 (個別到達可能性問題 (individual accessibility problem; IAP)).

半 Thue 系 S と文字列 w_0 を固定する．

Input: 文字列 w

Question: $w \xrightarrow[S]{*} w_0$ か？

問題 1.6 (共通子孫問題 (common descendant problem; CDP)).

半 Thue 系 S を固定する．

Input: 文字列 w_1, w_2

Question: $w_1 \xrightarrow[S]{*} w$ かつ $w_2 \xrightarrow[S]{*} w$ となる文字列 w は存在するか？

問題 1.7 (停止性問題 (termination problem; TP)).

半 Thue 系 S を固定する．

Input: 文字列 w

Question: w から始めて，$\xrightarrow[S]{}$ を適用する操作を無限に続けることはできるか？

明らかに，到達可能性問題 ACP が決定可能ならば Thue 系の到達可能性問題や各 S, w_0 に対する個別到達可能性問題 IAP も決定可能である．(すなわち，ACP の方が "難しい"．)

2 決定不能性の証明

本節では，前節で定義した決定問題たちの決定不能性を証明する．

定理 2.1. 半 Thue 系の到達可能性問題 1.3 (ACP) は決定不能である．

証明. 仮に ACP が決定可能であるとすると，Turing 機械の停止問題 HALT も決定可能となってしまうことを示す．「Post の対応問題」 [3] の場合とほとんど同様にして証明する．

任意の Turing 機械 $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\mathrm{accept}}, q_{\mathrm{reject}})$ と入力文字列 $w = w_1 w_2 \cdots w_n$ をとる．例によっ

[*3] 半 Thue 系 S を固定して S ごとに決定問題を考えることもある．

て M は「ヘッドがテープの左端を見ている状態でさらにヘッドを左に動かそうとすることはない」という条件を満たすとしてよい．このとき，$\Sigma^M := \Gamma \cup (Q \setminus \{q_{\mathrm{reject}}\}) \cup \{\texttt{\#}, \texttt{@}\}$ とおき ($\texttt{\#}$と$\texttt{@}$は Σ にない新しい文字とする)，Σ^M 上の半 Thue 系 S^M と文字列 w_1^M, w_2^M を次のように構成する．まず，w_1^M を開始状況 $w_1^M := q_0\texttt{@}w_1w_2\cdots w_n\texttt{\#}$ とする．$\texttt{\#}$はテープの右端を表すための記号，$\texttt{@}$は開始状況であることを表すための記号である．次に w_2^M を終了時の計算状況 (からテープ上の文字を消去したもの) $w_2^M := q_{\mathrm{accept}}\texttt{\#}$ とする．最後に，書き換え規則 S^M を以下のように段階的に構成する．

Step 0.　$q_0\texttt{@} \longrightarrow q_0$ を S^M に追加する．[*4]

Step 1.　遷移関数 δ による遷移をシミュレートするための書き換え規則を S^M に追加する．

- $\delta(q,a) = (r,b,\mathrm{R})$ となる全ての $q \in Q \setminus \{q_{\mathrm{accept}}, q_{\mathrm{reject}}\}, r \in Q \setminus \{q_{\mathrm{reject}}\}, a, b \in \Gamma$ に対して $qa \longrightarrow br$ を S^M に追加する．
- 全ての $q \in Q \setminus \{q_{\mathrm{accept}}, q_{\mathrm{reject}}\}$ に対して $q\texttt{\#} \longrightarrow q\textvisiblespace\texttt{\#}$ を S^M に追加する．
- $\delta(q,a) = (r,b,\mathrm{L})$ となる全ての $q \in Q \setminus \{q_{\mathrm{accept}}, q_{\mathrm{reject}}\}, r \in Q \setminus \{q_{\mathrm{reject}}\}, a, b \in \Gamma$ と $c \in \Gamma$ に対して $cqa \longrightarrow rcb$ を S^M に追加する．

Step 2.　計算終了後，テープの内容を消去するための書き換え規則を S^M に追加する．

- 全ての $a \in \Gamma$ に対し，$q_{\mathrm{accept}}a \longrightarrow q_{\mathrm{accept}}$ を S^M に追加する．
- 全ての $a \in \Gamma$ に対し，$aq_{\mathrm{accept}}\texttt{\#} \longrightarrow q_{\mathrm{accept}}\texttt{\#}$ を S^M に追加する．

以上の設定のもとで，

$$M \text{ が } w \text{ を受理する} \iff w_1^M \xrightarrow[S^M]{*} w_2^M$$

となるので ACP は決定不能である．　□

例 2.2.　M を「Turing 機械の定義と停止問題」 [1] で定義した $\{\, \mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \geq 0 \,\}$ を判定する Turing 機械とする．HALT への入力を $(M, \mathtt{ab})$ とすると，$\Sigma^M = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \textvisiblespace, q_0, q_1, q_2, q_3, q_{\mathrm{accept}}, \texttt{\#}, \texttt{@}\}, w_1^M = q_0\texttt{@ab\#}, w_2^M = q_{\mathrm{accept}}\texttt{\#}$,

$$S^M = \left\{ \begin{array}{lllll}
q_0\texttt{@} \to q_0, & & & & \\
q_0\mathtt{a} \to \textvisiblespace q_1, & q_0\textvisiblespace \to \textvisiblespace q_{\mathrm{accept}}, & q_1\mathtt{a} \to \mathtt{a}q_1, & q_1\mathtt{b} \to \mathtt{b}q_1, & q_3\textvisiblespace \to \textvisiblespace q_0, \\
q_0\texttt{\#} \to q_0\textvisiblespace\texttt{\#}, & q_1\texttt{\#} \to q_1\textvisiblespace\texttt{\#}, & & & \\
\mathtt{a}q_1\textvisiblespace \to q_2\mathtt{a}\textvisiblespace, & \mathtt{b}q_1\textvisiblespace \to q_2\mathtt{b}\textvisiblespace, & \textvisiblespace q_1\textvisiblespace \to q_2\textvisiblespace\textvisiblespace, & & \\
\mathtt{a}q_2\mathtt{b} \to q_3\mathtt{a}\textvisiblespace, & \mathtt{b}q_2\mathtt{b} \to q_3\mathtt{b}\textvisiblespace, & \textvisiblespace q_2\mathtt{b} \to q_3\textvisiblespace\textvisiblespace, & & \\
\mathtt{a}q_3\mathtt{a} \to q_3\mathtt{aa}, & \mathtt{b}q_3\mathtt{a} \to q_3\mathtt{ba}, & \textvisiblespace q_3\mathtt{a} \to q_3\textvisiblespace\mathtt{a}, & & \\
\mathtt{a}q_3\mathtt{b} \to q_3\mathtt{ab}, & \mathtt{b}q_3\mathtt{b} \to q_3\mathtt{bb}, & \textvisiblespace q_3\mathtt{b} \to q_3\textvisiblespace\mathtt{b}, & & \\
q_{\mathrm{accept}}\mathtt{a} \to q_{\mathrm{accept}}, & q_{\mathrm{accept}}\mathtt{b} \to q_{\mathrm{accept}}, & q_{\mathrm{accept}}\textvisiblespace \to q_{\mathrm{accept}}, & & \\
\mathtt{a}q_{\mathrm{accept}}\texttt{\#} \to q_{\mathrm{accept}}\texttt{\#}, & \mathtt{b}q_{\mathrm{accept}}\texttt{\#} \to q_{\mathrm{accept}}\texttt{\#}, & \textvisiblespace q_{\mathrm{accept}}\texttt{\#} \to q_{\mathrm{accept}}\texttt{\#} & &
\end{array} \right\}$$

であり，

$$\begin{aligned}
w_1^M = q_0\texttt{@ab\#} &\xrightarrow[S^M]{} q_0\texttt{ab\#} \xrightarrow[S^M]{} \textvisiblespace q_1\texttt{b\#} \xrightarrow[S^M]{} \textvisiblespace\mathtt{b}q_1\texttt{\#} \xrightarrow[S^M]{} \textvisiblespace\mathtt{b}q_1\textvisiblespace\texttt{\#} \xrightarrow[S^M]{} \textvisiblespace q_2\mathtt{b}\textvisiblespace\texttt{\#} \xrightarrow[S^M]{} q_3\textvisiblespace\textvisiblespace\textvisiblespace\texttt{\#} \\
&\xrightarrow[S^M]{} \textvisiblespace q_0\textvisiblespace\textvisiblespace\texttt{\#} \xrightarrow[S^M]{} \textvisiblespace\textvisiblespace q_{\mathrm{accept}}\textvisiblespace\texttt{\#} \xrightarrow[S^M]{} \textvisiblespace\textvisiblespace q_{\mathrm{accept}}\texttt{\#} \xrightarrow[S^M]{} \textvisiblespace q_{\mathrm{accept}}\texttt{\#} \xrightarrow[S^M]{} q_{\mathrm{accept}}\texttt{\#} = w_2^M
\end{aligned}$$

だから $w_1^M \xrightarrow[S^M]{*} w_2^M$ となる．

[*4] ACP の決定不能性を言うだけなら$\texttt{@}$の使用は冗長なだけであるが，後の証明の都合で加えてある．

系 2.3 (Markov and Post, 1947). Thue 系の到達可能性問題 1.4 は決定不能である．

証明．HALT への入力 M, w に対して，定理 2.1 の証明と同様にして $\Sigma^M, w_1^M, w_2^M, S^M$ を構成する．このとき，S^M の構成から次の条件が成り立っていることに注意する:

$$\begin{gathered} w_1^M \xrightarrow[S^M]{*} x \text{ となる任意の文字列 } x \in {\Sigma^M}^* \text{ について，} \\ x \text{ に適用可能な } S^M \text{ の書き換え規則は高々 1 つである．} \end{gathered} \tag{$*$}$$

S^M を対称化してできる Thue 系を $S^M_{\mathrm{sym}} := S^M \cup \{\, (y, x) \mid (x, y) \in S^M \,\}$ とおく．このとき

$$M \text{ が } w \text{ を受理する} \iff w_1^M \xrightarrow[S^M]{*} w_2^M$$

であることは既にわかっているので，

$$w_1^M \xrightarrow[S^M]{*} w_2^M \iff w_1^M \xrightarrow[S^M_{\mathrm{sym}}]{*} w_2^M$$

を示せば証明が終わる．「$\Longrightarrow$」向きは明らか．「$\Longleftarrow$」向きを示すために，$w_1^M \xrightarrow[S^M_{\mathrm{sym}}]{*} w_2^M$ であると仮定し，$\xrightarrow[S^M_{\mathrm{sym}}]{}$ の適用回数が最小の導出 $w_1^M = u_0 \xrightarrow[S^M_{\mathrm{sym}}]{} u_1 \xrightarrow[S^M_{\mathrm{sym}}]{} u_2 \xrightarrow[S^M_{\mathrm{sym}}]{} \cdots \xrightarrow[S^M_{\mathrm{sym}}]{} u_l = w_2^M$ をとる．ここで，「$u_i \xrightarrow[S^M_{\mathrm{sym}}]{} u_{i+1}$ だが $u_i \xrightarrow[S^M]{} u_{i+1}$ ではない」となっているような最小の $i \geq 0$ を考える．このような i が存在しなければ $w_1^M \xrightarrow[S^M]{*} w_2^T$ なので証明が終わる．仮に i が存在したとして，$i > 0$ とすると，条件 $(*)$ より $u_i \xrightarrow[S^M_{\mathrm{sym}}]{} u_{i+1}$ で用いられた書き換え規則は $u_{i-1} \xrightarrow[S^M_{\mathrm{sym}}]{} u_i$ で用いられた S^M の規則を逆向きにしたもの以外ありえない．よってこのとき $u_{i-1} = u_{i+1}$ だから，$u_{i-1} \xrightarrow[S^M_{\mathrm{sym}}]{} u_i \xrightarrow[S^M_{\mathrm{sym}}]{} u_{i+1}$ を取り除くことで $w_1^M \xrightarrow[S^M_{\mathrm{sym}}]{*} w_2^M$ のより短い導出が作れるので l の最小性に反する．次に $i = 0$ だったとすると，初期状況 w_1^M に@があることから $u_0 \xrightarrow[S^M_{\mathrm{sym}}]{} u_1$ で使われた規則は $q_0 \longrightarrow q_0$@ 以外ありえない．u_1 に適用可能な規則も同様に q_0@ $\longrightarrow q_0$ と $q_0 \longrightarrow q_0$@ しかない．$u_l = w_2^M$ には@は含まれていないので，いつかはある $k < l$ で $u_k = w_1^M$ に戻ってこなければならない．よってこの場合も l の最小性に反する．したがってこのような i は存在しない． □

系 2.4. 半 Thue 系の個別到達可能性問題 1.5 (IAP) が決定不能となるような S, w_0 が存在する．

証明．証明には万能 Turing 機械を用いる．万能 Turing 機械については「Turing 機械の定義と停止問題」 [1] を参照のこと．

万能 Turing 機械 U をとる．すなわち，任意の Turing 機械 M と文字列 w に対し $U(\langle\langle M\rangle, w\rangle) \simeq M(w)$ となっている．この U に対して，定理 2.1 の証明と同様に Σ^U, S^U, w_2^U を構成する．このとき，任意の Turing 機械 M と入力文字列 w に対して，w_1^U を $\langle\langle M\rangle, w\rangle$ に対応する初期状況を表す文字列とすれば

$$\begin{aligned} M \text{ が } w \text{ を受理する} &\iff U \text{ が } \langle\langle M\rangle, w\rangle \text{ を受理する} \\ &\iff w_1^U \xrightarrow[S^U]{*} w_2^U \end{aligned}$$

となるので，S^U, w_2^U に関する IAP は決定不能である． □

系 2.5. 半 Thue 系の共通子孫問題 1.6 (CDP) が決定不能となるような S が存在する．

証明. 系 2.3 の証明と系 2.4 の証明を合わせて，対称化された S^U_{sym} を考えれば，任意の Turing 機械 M と入力文字列 u の組 $\langle\langle M\rangle, u\rangle$ に対応する w^U_1 について

$$\begin{aligned} w^U_1 \xrightarrow[S^U_{\mathrm{sym}}]{*} w \text{ かつ } w^U_2 \xrightarrow[S^U_{\mathrm{sym}}]{*} w \text{ となるような } w \text{ が存在する } &\iff w^U_1 \xrightarrow[S^U_{\mathrm{sym}}]{*} w^U_2 \\ &\iff w^U_1 \xrightarrow[S^U]{*} w^U_2 \end{aligned}$$

であり，S^U, w^U_2 に関する IAP の決定不能性から S^U_{sym} に関する CDP の決定不能性がわかる． □

系 2.6. 半 Thue 系の停止性問題 1.7 (TP) が決定不能となるような S が存在する．

証明.「Turing 機械の定義と停止問題」 [1] における停止問題の変種その 3 を用いる．

系 2.4 の証明と同様に S^U, w^U_2 をとれば，Turing 機械 M と入力文字列 w の組 $\langle\langle M\rangle, w\rangle$ に対応する w^U_1 について，系 2.3 の証明における条件 $(*)$ より

$$\begin{aligned} M \text{ が } w \text{ を受理する } &\implies w^U_1 \xrightarrow[S^U]{*} w^U_2, \\ M \text{ が } w \text{ を拒否する } &\implies w^U_1 \text{ に } \xrightarrow[S^U]{} \text{ を適用していくと，拒否状態に入る直前で} \\ &\qquad \text{適用可能な規則がなくなる，} \\ M \text{ が } w \text{ に対して停止しない } &\implies w^U_1 \text{ に } \xrightarrow[S^U]{} \text{ を無限に適用し続けられる} \end{aligned}$$

となるので

$$M \text{ が } w \text{ に対して停止する } \iff w^U_1 \text{ に } \xrightarrow[S^U]{} \text{ を無限に適用し続けることはできない}$$

を得，したがって S^U に関する TP は決定不能である． □

3 その他の結果

S に関する ACP, IAP, CDP と S' に関する TP が決定不能になるような，書き換え規則が 3 個だけの半 Thue 系 S, S' を構成できる [6]．この系として，PCP の入力を 7 個に制限した問題 PCP(7) が決定不能であることが導かれる．

参考文献

[1] y., Turing 機械の定義と停止問題 (2018), `http://iso.2022.jp/math/undecidable-problems/files/turing-machine-and-the-halting-problem.pdf`.

[2] y., カウンター機械 (レジスター機械) (2018), `http://iso.2022.jp/math/undecidable-problems/files/counter-machine.pdf`.

[3] y., Post の対応問題 (2018), `http://iso.2022.jp/math/undecidable-problems/files/post-correspondence-problem.pdf`.

[4] 新井敏康, 数学基礎論, 岩波書店, 2011.

[5] A. クフォーリ・R. モル・M. アービブ (甘利俊一・金谷健一・川端勉 訳), プログラミングによる計算可能性理論, サイエンス社, 1987.

[6] Y. Matiyasevich, G. Sénizergues, Decision problems for semi-Thue systems with a few rules, *Theoret. Comput. Sci.* **330** no. 1 (2005) 145–169, `https://doi.org/10.1016/j.tcs.2004.09.016`.

変更履歴

2018/08/01　公開