

Polyomino Problem

y.*

2018 年 4 月 1 日

最終更新日: 2018 年 4 月 3 日

概要

ポリオミノ (polyomino) とは, 有限個の単位正方形を辺で貼り合わせて作られる図形である. Polyomino problem とは, 与えられた有限種類のポリオミノを用いて全平面を充填できるかという問題である. 本稿ではまず Wang のタイル貼り問題の決定不能性を利用して polyomino problem の決定不能性を証明し, その後入力の個数を制限した k -polyomino problem の決定不能性も証明する.

Keywords: ポリオミノ (polyomino), タイル貼り (tiling).

1 Polyomino Problem

ポリオミノ (polyomino) とは, 有限個の単位正方形を辺で貼り合わせて作られる図形である. 特に, 1 個, 2 個, 3 個, 4 個, 5 個, ……の単位正方形からなるポリオミノのことをそれぞれモノミノ (monomino), ドミノ (domino), トロミノ (tromino), テトロミノ (tetromino), ペントミノ (pentomino), ……と呼ぶ. 図 1 に小さいポリオミノの例を示す.

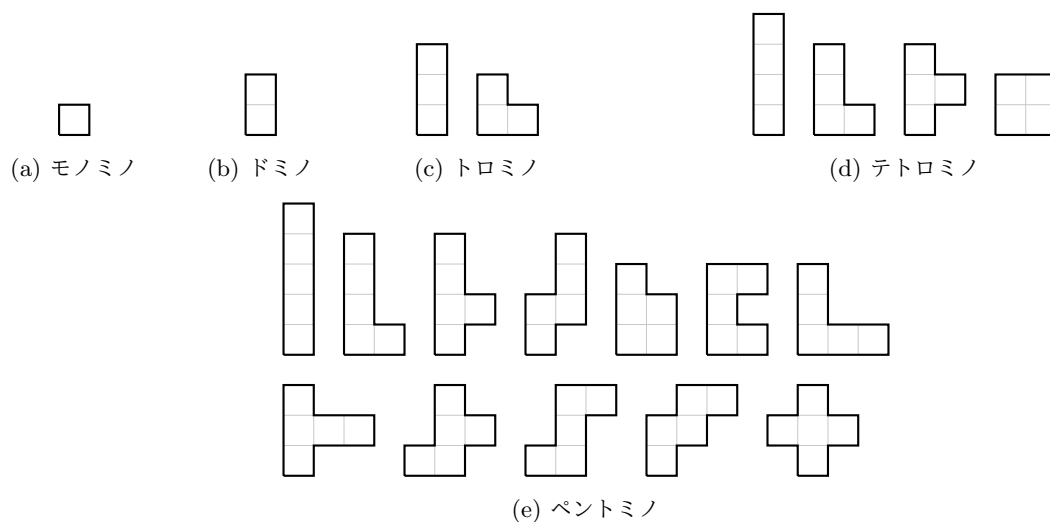


図 1: ポリオミノの例

* <http://iso.2022.jp/>

Polyomino problem とは、与えられた有限個のポリオミノを用いて全平面を充填できるかを問う決定問題である。

問題 1.1 (polyomino problem).

Input: ポリオミノの有限集合 S

Question: S の元を用いて全平面を充填できるか？ (ただし、同じ元は何回使ってもよく、また回転・反転をしてもよいとする)

例 1.2. 1つのポリオミノからなる集合 $S := \left\{ \begin{array}{c} \square \square \square \square \\ \square \square \square \square \\ \square \square \square \square \\ \square \square \square \square \end{array} \right\}$ を考えると、 S は図 2 のようにして平面全体を充填することができる.*¹

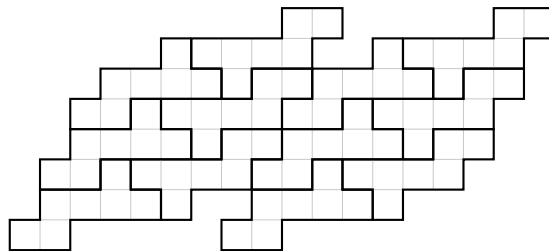


図 2: S による平面の充填

一方、 $S' := \left\{ \begin{array}{c} \square \square \square \square \\ \square \square \square \square \\ \square \square \square \square \\ \square \square \square \square \end{array}, \begin{array}{c} \square \square \square \square \\ \square \square \square \square \\ \square \square \square \square \\ \square \square \square \square \end{array} \right\}$ とおくと、 S' の元をどのように並べても平面全体を充填することはできない。

与えられたポリオミノの回転・反転を許すかどうかによって異なる決定問題ができる。回転・反転を禁止したバージョンを次に示す。

問題 1.3 (polyomino translation problem).

Input: ポリオミノの有限集合 S

Question: S の元を用いて全平面を充填できるか？ (ただし、同じ元は何回使ってもよいが、回転・反転は禁止とする)

実は回転・反転を許すかどうかは決定不能性に影響を与えない。

補題 1.4. Polyomino problem が決定不能 \iff polyomino translation problem が決定不能.

証明の概要. (\implies) 仮に polyomino translation problem が決定可能であるとして、polyomino problem が決定可能となることを示す. polyomino problem の入力例えば $S = \left\{ \dots, \begin{array}{c} \square \square \square \square \\ \square \square \square \square \\ \square \square \square \square \\ \square \square \square \square \end{array}, \dots \right\}$ だったとすると、 S の各ポリオミノに対し、その回転・反転によって作られる全てのポリオミノ (高々 8 通り) を

*¹ 1つのポリオミノで平面全体を充填することができるための強力な十分条件として Conway's criterion [5, Theorem 1] が知られている。

加えた集合を

$$S' := \left\{ \dots, \text{L-shaped}, \text{2x2 square}, \text{3x1 horizontal}, \text{3x1 vertical}, \text{2x2 square with hole}, \text{2x3 horizontal}, \text{2x3 vertical}, \text{3x2 horizontal}, \text{3x2 vertical}, \text{4x1 horizontal}, \text{4x1 vertical}, \dots \right\}$$

とおけば,

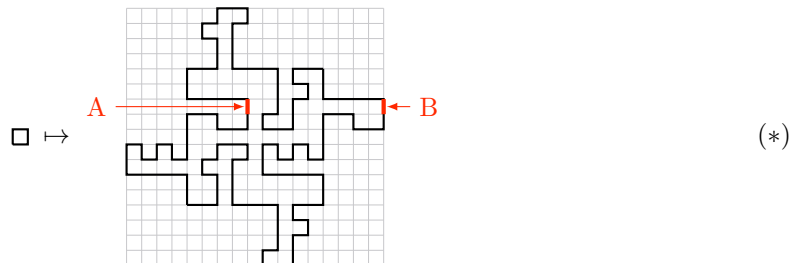
S が回転・反転ありで全平面を充填できる $\iff S'$ が回転・反転なしで全平面を充填できる

となる.

(\Leftarrow) 仮に polyomino problem が決定可能であるとして, polyomino translation problem が決定可能となることを示す. こちらは少々難しいが, 入力に辺同士をもとと同じ向きでしか接触させられないような“仕掛け”を施せばよい. polyomino translation problem の入力例えば $S = \{ \dots, \text{L-shaped}, \dots \}$ だったとする. このとき

$$S_{\circlearrowleft} := \left\{ \dots, \text{rotated L-shaped}, \dots \right\}$$

とおけば(すなわち, S に含まれる各単位正方形に対し



という変換を施せば),*²

S が回転・反転なしで全平面を充填できる $\iff S_{\circlearrowleft}$ が回転・反転ありで全平面を充填できる

となる. \implies 向きは当たり前だから, 本質的なのは \Leftarrow 向きの方である. S_{\circlearrowleft} の元によって回転・反転ありで平面全体が充填できたとして, その充填に現れる (*) の形をした部分のひとつに注目しよう. 平面全体を充填しているのだから, 辺 **A** に接触する辺が存在しなければならない. ところが, そのような辺としてありえるものは辺 **B** に相当する辺しかなく, しかももとと同じ向きでのみ接触が可能である(これを厳密に証明したければ, 上のポリオミノ (*) の全ての辺 (128 個ある) を全ての可能な向き (反転の 2 通り) で接触させてみて, その置き方が実際に可能かどうか調べればよい). **A** 以外の他の辺についても同様に考えることにより証明が完了する. \square

*² 実際にはもっと単純な形状でも十分なのだが, このくらい複雑な形にしておいた方が同値性の証明が簡単になる.

Polyomino problem の決定不能性の証明には Wang のタイル貼り問題を用いる。詳細は「Wang のタイル貼り問題」[1] を参照のこと。

問題 1.5 (Wang のタイル貼り問題 (Wang tiling problem, domino problem)).

Input: タイル (各辺に色が塗られた単位正方形) の有限集合 T

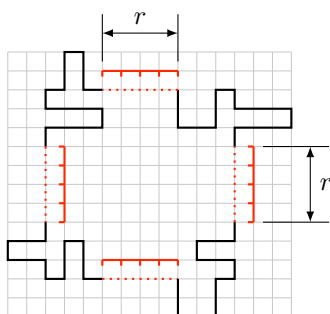
Question: T によるタイル貼りは存在するか?

では, polyomino problem の決定不能性を証明しよう。

定理 1.6 (Golomb [4], 1970). Polyomino problem は決定不能である。

証明. 補題 1.4 より, polyomino translation problem の決定不能性を示せばよい。^{*3}Polyomino translation problem が決定可能であると仮定すると, Wang のタイル貼り問題が決定可能になってしまうことを示す。Wang のタイル貼り問題の入力を $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ とする。 T に現れる色の数を m とし, $0, 1, \dots, m-1$ を 2 進展開するのに十分なビット数 r をとる (たとえば $r := \lceil \log_2 m \rceil$ とすればよい)。

T の各タイル t_i を次のようなポリオミノに変換する:

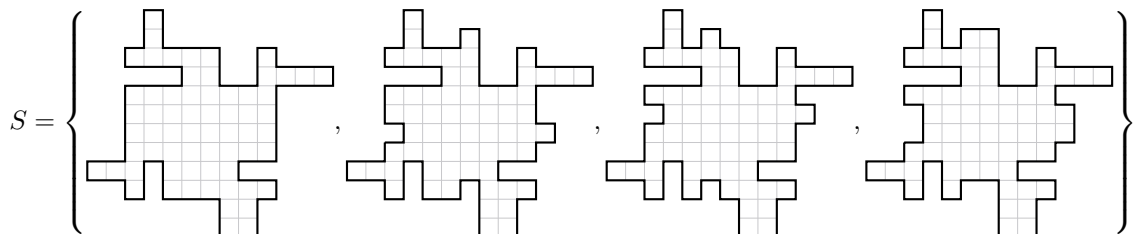


ここで の部分は, t_i の辺に書かれた色を $0, 1, \dots, m-1$ のいずれかとみなし, それを 2 進展開したときの各桁の値によって凹凸を決める。

$r = 2$ の場合の例を以下に示す。

$$T = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 3 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline \end{array} \right\}$$

↓



以上より, T の各タイルを上のようなポリオミノに変換してできるポリオミノ集合を S とすれば

$$T \text{ がタイル貼りを持つ} \iff S \text{ が全平面を充填できる}$$

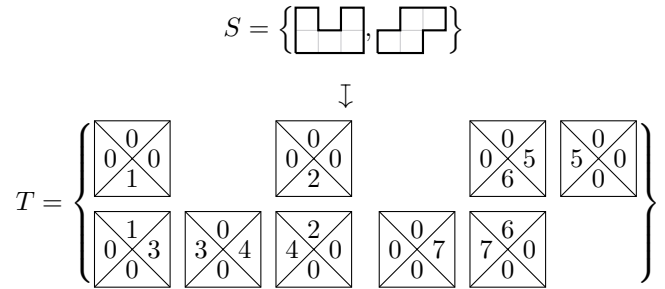
^{*3} 実は Golomb によるこの証明は polyomino problem でも正しいのだが, きちんと証明しようと思うと面倒なのでここでは polyomino translation problem を経由した。あるいは, 補題 1.4 の証明のように複雑な形状の突起・溝を作ればより簡単に証明できる。

となる。 □

上の証明とは逆に, polyomino problem の決定不能性から Wang のタイル貼り問題の決定不能性を導くこともできる。

命題 1.7. Wang のタイル貼り問題が決定可能 \implies polyomino translation problem が決定可能。

証明の概要. 例えば, 次のような変換を施せばよい。



2 k -Polyomino Problem

本節では, polyomino problem, polyomino translation problem の入力の個数を制限したバージョンについて考える。

k を正整数とする。

問題 2.1 (k -polyomino problem).

Input: ポリオミノの k 元集合 S

Question: S の元を用いて全平面を充填できるか? (ただし, 同じ元は何回使ってもよく, また回転・反転をしてもよいとする)

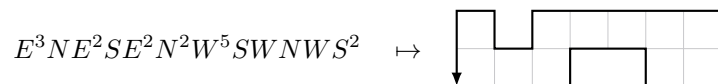
問題 2.2 (k -polyomino translation problem).

Input: ポリオミノの k 元集合 S

Question: S の元を用いて全平面を充填できるか? (ただし, 同じ元は何回使ってもよいが, 回転・反転は禁止とする)

k -polyomino problem の決定不能性を示すために, **contour word** というポリオミノの表示方法を導入しておく。Contour word とはアルファベット $\{E, N, W, S\}$ 上の文字列であり, それぞれの文字は右 (東, East), 上 (北, North), 左 (西, West), 下 (南, South) へ 1 だけ移動することを表す。Contour word から定まるパスが平面内のある領域を囲んでいるとき, その領域を contour word から定まるポリオミノとする。

例えば



である。

定理 2.3 (Ollinger [3], 2009). 5-polyomino problem は決定不能である。

証明. 仮に 5-polyomino problem が決定可能であったとすると Wang のタイル貼り問題が決定可能になって

しまうことを示す. Wang のタイル貼り問題の入力を $T = \{t_1, t_2, \dots, t_N\}$ とする. T に現れる色の数を m とし, $r := \lceil \log_2 m \rceil, k := r + 4$ とおく.

表記を簡単にするため, contour words を $e := E^7, n := N^7, w := W^7, s := S^7$ と定める. また $\lfloor \rightarrow$, $\lceil \rightarrow$, $\lfloor \leftarrow$, $\lceil \leftarrow$ という形のパスをそれぞれ bit, marker, inside と呼ぶことにし, これらの向きごとに定まる contour word を次の表 1 のように定める.

表 1: bit, marker, inside

| | p | q | b | d |
|---------------------|---|---|---|---|
| e_{bit} | | | | |
| w_{bit} | | | | |
| e_{marker} | | | | |
| w_{marker} | | | | |
| e_{inside} | | × | | × |
| w_{inside} | × | | × | |

例えば $e_{\text{bit}}^p = E^3 N^2 E^2 S W S E^3, w_{\text{marker}}^b = W^3 S E S W S W N^3 W^3$ である.

次に各 $t_i \in T$ に対し, $\{p, q\}$ 上の文字列 $\text{Bottom}(i), \text{Right}(i)$ と $\{b, d\}$ 上の文字列 $\text{Top}(i), \text{Left}(i)$ を次のように定める:

- $\text{Bottom}(i)$: $\text{Bottom}(t_i)$ の r 桁での 2 進展開を b とするとき, $00b01$ の $\{0, 1\}$ を $\{p, q\}$ に置換した列,
- $\text{Right}(i)$: $\text{Right}(t_i)$ の r 桁での 2 進展開を b とするとき, $10b11$ の $\{0, 1\}$ を $\{p, q\}$ に置換した列,
- $\text{Top}(i)$: $\text{Top}(t_i)$ の r 桁での 2 進展開を b とするとき, $00b01$ の $\{0, 1\}$ を $\{b, d\}$ に置換した列,
- $\text{Left}(i)$: $\text{Left}(t_i)$ の r 桁での 2 進展開を b とするとき, $10b11$ の $\{0, 1\}$ を $\{b, d\}$ に置換した列.

例えば $r = 3, t_i = \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline 6 \times 6 \\ \hline 6 \\ \hline \end{array}$ のとき

$$\begin{aligned} \text{Bottom}(t_i) = 6 &\mapsto 0011001 \mapsto \text{Bottom}(i) = \text{ppqppq} = \prod_{i=j}^7 \text{Bottom}(i)_j, \\ \text{Right}(t_i) = 6 &\mapsto 1011011 \mapsto \text{Right}(i) = \text{qqppqq} = \prod_{i=j}^7 \text{Right}(i)_j, \\ \text{Top}(t_i) = 6 &\mapsto 0011001 \mapsto \text{Top}(i) = \text{bddbdd} = \prod_{i=j}^7 \text{Top}(i)_j, \\ \text{Left}(t_i) = 6 &\mapsto 1011011 \mapsto \text{Left}(i) = \text{dbddbd} = \prod_{i=j}^7 \text{Left}(i)_j \end{aligned}$$

となる.

以上の設定のもとで, 5 つのポリオミノ **tooth, wire, filler, jaw, meat** を次のような contour word で定

める:

$$\begin{aligned}
\text{tooth} &:= e_{\text{inside}}^{\text{b}} n w_{\text{bit}}^{\text{q}} s, \\
\text{wire} &:= e_{\text{bit}}^{\text{b}} n^{k+2} w^{2N(k+1)+1} n^{k+1} w_{\text{bit}}^{\text{p}} s^{k+2} e^{2N(k+1)+1} s^{k+1}, \\
\text{filler} &:= e_{\text{marker}}^{\text{b}} (s e_{\text{inside}}^{\text{b}})^k (e_{\text{inside}}^{\text{b}} n)^k e_{\text{marker}}^{\text{d}} n w_{\text{marker}}^{\text{q}} (n w_{\text{inside}}^{\text{p}})^k (w_{\text{inside}}^{\text{p}} s)^k w_{\text{marker}}^{\text{p}} s, \\
\text{jaw} &:= e_{\text{marker}}^{\text{q}} (e_{\text{marker}}^{\text{p}} (n e_{\text{inside}}^{\text{p}})^k (e_{\text{inside}}^{\text{p}} s)^k e_{\text{marker}}^{\text{q}})^{N-1} \\
&\quad s (w_{\text{marker}}^{\text{d}} (s w_{\text{inside}}^{\text{d}})^k (w_{\text{inside}}^{\text{d}} n)^k w_{\text{marker}}^{\text{b}})^{N-1} w_{\text{marker}}^{\text{d}} s^{k+1} e^{2(N-1)(2k+2)+4} n^{k+1} \\
&\quad w_{\text{marker}}^{\text{b}} (w_{\text{marker}}^{\text{d}} (s w_{\text{inside}}^{\text{d}})^k (w_{\text{inside}}^{\text{d}} n)^k w_{\text{marker}}^{\text{b}})^{N-1} \\
&\quad n (e_{\text{marker}}^{\text{p}} (n e_{\text{inside}}^{\text{p}})^k (e_{\text{inside}}^{\text{p}} s)^k e_{\text{marker}}^{\text{q}})^{N-1} e_{\text{marker}}^{\text{p}} n^{k+1} w^{2(N-1)(2k+2)+4} s^{k+1}, \\
\text{meat} &:= \prod_{i=1}^N \left(e_{\text{marker}}^{\text{b}} \prod_{j=1}^{k-1} \left(e_{\text{bit}}^{\text{Bottom}(i)_j} s \right) e_{\text{bit}}^{\text{Bottom}(i)_k} \prod_{j=1}^{k-1} \left(e_{\text{bit}}^{\text{Right}(i)_j} n \right) e_{\text{bit}}^{\text{Right}(i)_k} e_{\text{marker}}^{\text{d}} \right) n \\
&\quad \prod_{i=N}^1 \left(w_{\text{marker}}^{\text{q}} \prod_{j=k}^2 \left(w_{\text{bit}}^{\text{Top}(i)_j} n \right) w_{\text{bit}}^{\text{Top}(i)_1} \prod_{j=k}^2 \left(w_{\text{bit}}^{\text{Left}(i)_j} s \right) w_{\text{bit}}^{\text{Left}(i)_1} w_{\text{marker}}^{\text{p}} \right) s.
\end{aligned}$$

$S := \{\text{tooth}, \text{wire}, \text{filler}, \text{jaw}, \text{meat}\}$ とおく. 例として $T = \left\{ t_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array}, t_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array}, t_3 = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \right\}$ ($N = 3, m = 2, r = 1, k = 5$) のときの S を図 3, 4, 5, 6, 7 に示す.

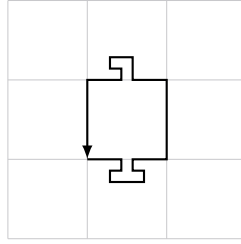


図 3: tooth

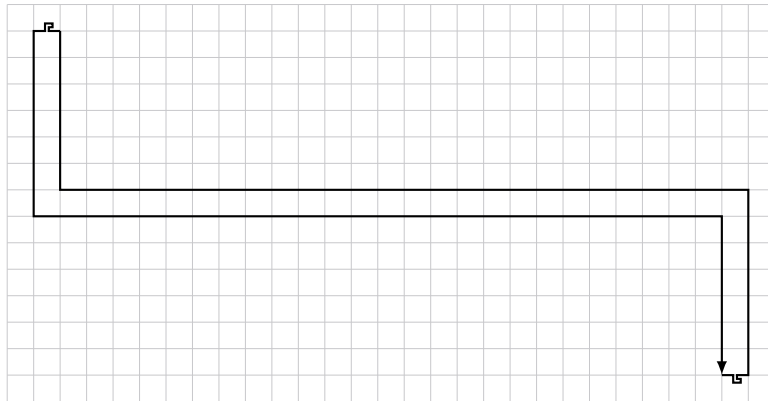


図 4: wire ($N = 3, k = 5$)

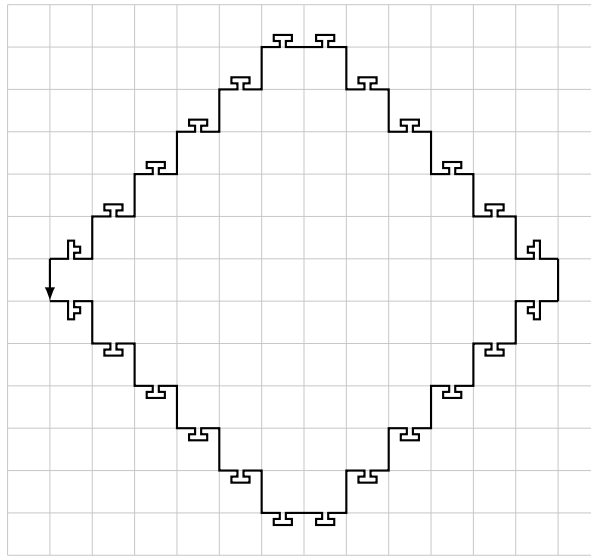


図 5: filler ($N = 3, k = 5$)

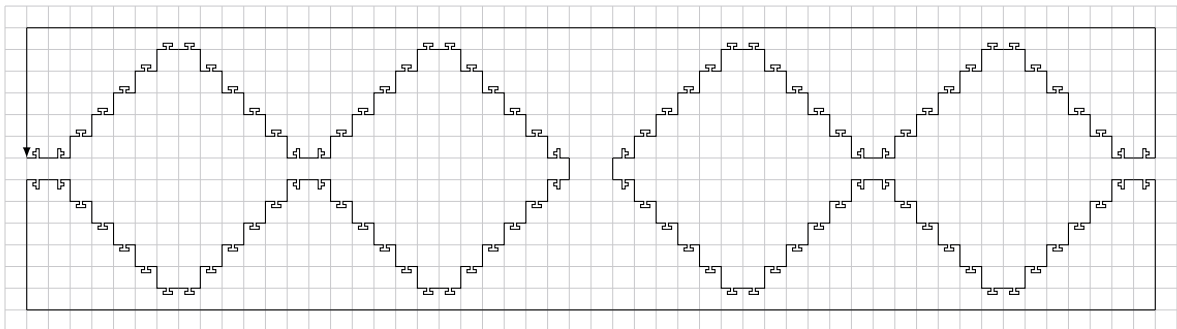


図 6: jaw ($N = 3, k = 5$)

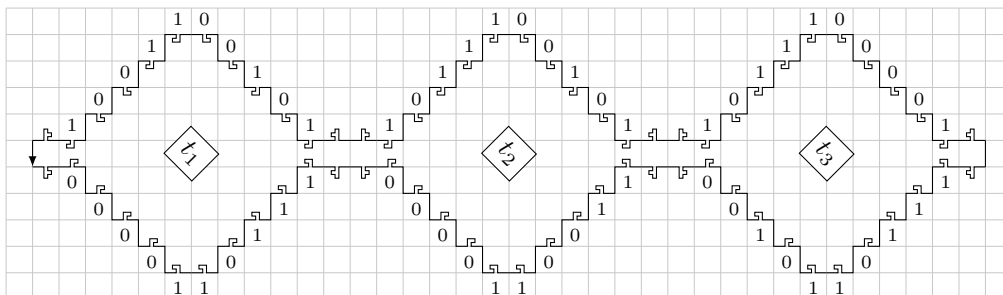


図 7: meat ($N = 3, k = 5$)

S による平面の充填の例を図 8 に示す。

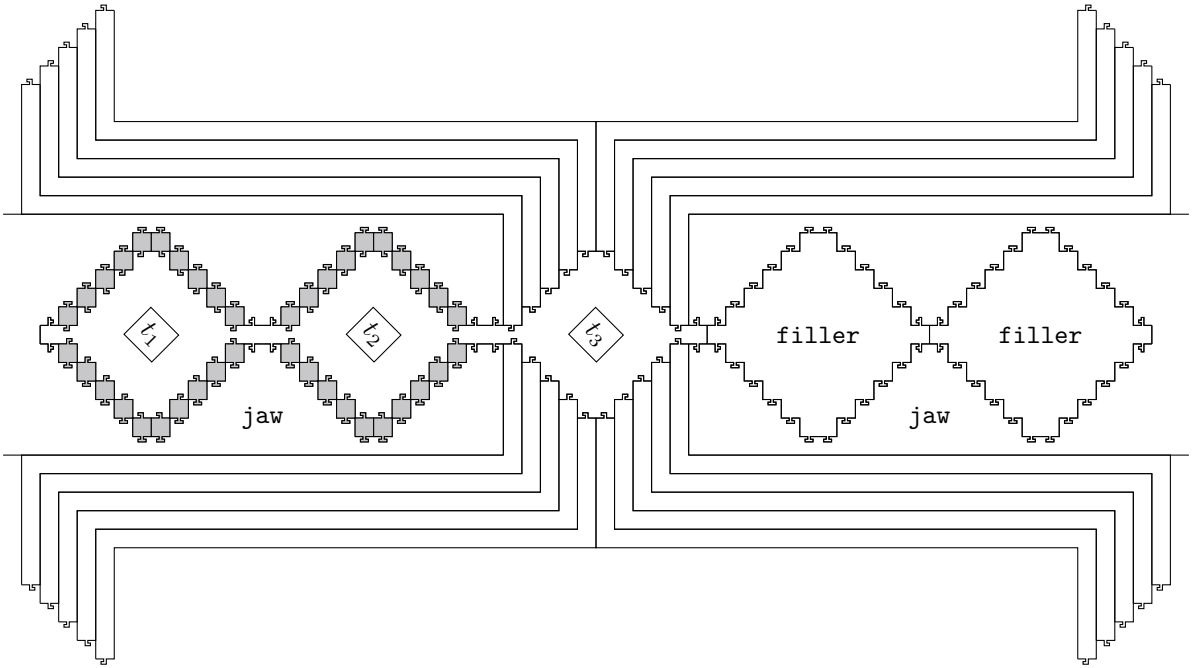


図 8: S による充填の例

これにより, S の充填から T のタイル貼りが図 9 のように復元できる.

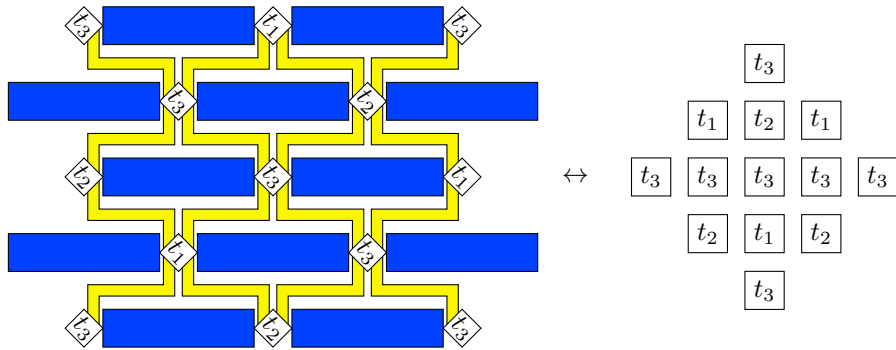


図 9: S の充填と T のタイル貼りの対応

以上により

$$T \text{ がタイル貼りを持つ} \iff S \text{ が全平面を充填できる}$$

となる.

□

これから k -polyomino translation problem の決定不能性が導かれる.

系 2.4. 11-polyomino translation problem は決定不能である.

証明の概要. 定理 2.3 の証明において, 回転・反転のため S を次のように変更すればよい:

tooth $\times 4$,
wire $\times 4$,
filler $\times 1$,
jaw $\times 1$,
meat $\times 1$. □

決定可能性については, 次の結果が知られている.

定理 2.5 (Beauquier and Nivat [6], 1991). 1-polyomino translation problem は決定可能である.

証明の概要. 1つのポリオミノ P で平行移動のみで全平面が充填可能であることは, P が pseudo-hexagon であるという次の条件と同値である: $\{E, N, W, S\}$ 上のある文字列 u, v, w が存在して, P は contour word $uw\tilde{w}\tilde{v}\tilde{u}$ によって表される (ここで \tilde{u} は u に $E \leftrightarrow W, N \leftrightarrow S$ という置換を施した文字列を表す). □

したがって, 以下の問題の決定可能性が未解決である.

未解決問題 2.6. $1 \leq k \leq 4$ について, k -polyomino problem は決定可能か?

未解決問題 2.7. $2 \leq k \leq 10$ について, k -polyomino translation problem は決定可能か?

参考文献

- [1] y., Wang のタイル貼り問題 (2018), <http://iso.2022.jp/math/undecidable-problems/files/wang-tiling-problem.pdf>.
- [2] N. Ollinger, Undecidability, Tiling and Polyominoes (2009), <https://www.univ-orleans.fr/lifo/Members/Nicolas.Ollinger/talks/2009/04/lirmm.pdf>.
- [3] N. Ollinger, Tiling the plane with a fixed number of polyominoes, *Language and Automata Theory and Applications*, Lecture Notes in Comput. Sci., vol. 5457, Springer, Berlin, Heidelberg, 2009, pp. 638–647, https://doi.org/10.1007/978-3-642-00982-2_54.
- [4] S. W. Golomb, Tiling with sets of polyominoes, *J. Comb. Theory* **9** no. 1 (1970) 60–71, [https://doi.org/10.1016/S0021-9800\(70\)80055-2](https://doi.org/10.1016/S0021-9800(70)80055-2).
- [5] G. C. Rhoads, Planar tilings by polyominoes, polyhexes, and polyiamonds, *J. Comput. Appl. Math.* **174** no. 2 (2005) 329–353, <https://doi.org/10.1016/j.cam.2004.05.002>.
- [6] D. Beauquier, M. Nivat, On translating one polyomino to tile the plane, *Discrete Comput. Geom.* **6** no. 4 (1991) 575–592, <https://doi.org/10.1007/BF02574705>.

変更履歴

2018/04/01 公開
2018/04/03 微修正