Fraction Game と一般化 Collatz 問題
Fraction Game and Generalized Collatz Problem

y.*

2018 年 7 月 4 日

最終更新日: 2018 年 7 月 4 日

概要

Collatz 予想 (または角谷予想，$3x+1$ 問題などとも呼ばれる) とは，「偶数なら 2 で割り，奇数なら 3 倍して 1 を足す」という操作を繰り返すと，どんな正の整数から始めてもいずれ 1 に辿り着くという予想である．この予想そのものは未解決であるが，実はこれを拡張した一般化 Collatz 問題という決定問題は決定不能であることが知られている．本稿ではまず vector game, fraction game という決定問題が決定不能であることを証明し，それを利用して一般化 Collatz 問題の決定不能性を導く．

Keywords: Collatz 予想 (Collatz conjecture), 一般化 Collatz 問題 (generalized Collatz problem), vector game, fraction game, rational game, Fractran.

本稿では $\mathbb{N}$ は非負整数の全体の集合を表すものとする．よって特に $0 \in \mathbb{N}$ である．

1 Fraction Game

本節の証明では Minsky 機械が Turing 完全であることを用いる．Minsky 機械の定義は「カウンター機械 (レジスター機械)」[1] を参照のこと．

問題 1.1 (vector game).

Input: 非負整数 $d, n \in \mathbb{N}$ と有限個の d 次元ベクトルのリスト $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathbb{Z}^d$

Question: $v = (n, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}^d$ に対し，

$$v + v_i \in \mathbb{N}^d \text{ を満たすような最初の } v_i \text{ を } v \text{ に加算する}^{*1} \qquad (*)$$

という操作を無限に繰り返すことはできるか？

例 1.2. $d = 2, n = 7, v_1 = (-4, 1), v_2 = (-2, 0), v_3 = (3, -1)$ とおく．$v = (n, 0) = (7, 0)$ から開始する．初めに，$v + v_1 = (7, 0) + (-4, 1) = (3, 1) \in \mathbb{N}^2$ なので $v = (3, 1)$ である．次に，$v + v_1 = (3, 1) + (-4, 1) = (-1, 2) \notin \mathbb{N}^2$ だが，$v + v_2 = (3, 1) + (-2, 0) = (1, 1) \in \mathbb{N}^2$ なので $v = (1, 1)$ である．以下同様に繰り返すと

$$(7,0) \xrightarrow{+v_1} (3,1) \xrightarrow{+v_2} (1,1) \xrightarrow{+v_3} (4,0) \xrightarrow{+v_1} (0,1) \xrightarrow{+v_3} (3,0) \xrightarrow{+v_2} (1,0)$$

となり，これ以上操作 $(*)$ を適用することはできないので停止する．

---

* `http://iso.2022.jp/`

*1 $i_0 := \min\{\, i \mid v + v_i \in \mathbb{N}^d \,\}$ とおき，v に v_{i_0} を加えるという意味．

一方，$d=2, n=3, v_1=(1,2)$ とおけば，当然

$$(3,0) \to (4,2) \to (5,4) \to \cdots$$

と無限に続く．

定理 1.3 (Conway [3], 1972). vector game は決定不能である．

証明. vector game で Minsky 機械の入力が 1 変数の任意のプログラムをシミュレートできることを示す．Minsky 機械のプログラム P をとる．P は以下の条件を満たすとしてよい．

- 入力は $\mathcal{R}_0$ に入り，プログラム終了時の $\mathcal{R}_1$ の内容 r_1 を出力値とする (カウンター機械の定義における $\mathcal{R}_0$ と $\mathcal{R}_1$ の役割を入れ換える)．
- プログラムは 1 行目から実行が開始され，0 行目に到達した時点で計算を終了する．
- 自分自身にジャンプする行はない．つまり，l 行目に $\texttt{inc}\,\mathcal{R}_i, (m)$ と書かれていたら $l \neq m$ であり，l 行目に $\texttt{jnzdec}\,\mathcal{R}_i, (m), (n)$ と書かれていたら $l \neq m \neq n \neq l$ である．
- P は停止するとき $\mathcal{R}_1$ 以外の全てのレジスターの内容を 0 にする．

P で使用されるレジスターを $\mathcal{R}_{M-1}$ までとし，P の行数を N とする．$d := M+N+1$ とおく．各 $i \geq 0$ に対し，$\mathbb{Z}^d$ の標準基底 (i 番目 (0 から数える) の成分だけが 1 で他は全て 0 というベクトル) を $e_i = (0,\ldots,0,\overset{i}{\check{1}},0,\ldots,0)$ と書く．$\mathbb{Z}^d$ 内のベクトルを，見やすさのため，前半の M 個の成分と後半の $N+1$ 個の成分に分けて $(x_0,\ldots,x_{M-1} \mid x_M,\ldots,x_{M+N})$ のように書く．前半の M 個の成分はレジスター $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_{M-1}$ の内容を保持するために用い，後半の $N+1$ 個は現在実行している行番号を保持するために用いる．

次の条件が成り立つようにベクトルのリスト L を構成したい．

$$\begin{aligned}
&\text{入力 } x \text{ に対し } P \text{ を実行すると } y \text{ を出力して停止する} \\
\iff& (x+1,0,\ldots,0) \text{ から始まる vector game } L \text{ が } (0,y+1,0,\ldots,0) \text{ で停止する．}
\end{aligned}$$

実際には以下のように構成すればよい．

1. P の各行に対して，
   - l 行目が $\texttt{inc}\,\mathcal{R}_i, (m)$ だったら
   $$e_i - e_{M+l} + e_{M+m} = (0,\ldots,\overset{i}{\check{1}},\ldots,0 \mid 0,\ldots,\overset{M+l}{\breve{-1}},\ldots,\overset{M+m}{\check{1}},\ldots,0)$$
   を L の末尾に加える．
   - l 行目が $\texttt{jnzdec}\,\mathcal{R}_i, (m), (n)$ だったら
   $$\begin{aligned}
   -e_i - e_{M+l} + e_{M+m} &= (0,\ldots,\overset{i}{\breve{-1}},\ldots,0 \mid 0,\ldots,\overset{M+l}{\breve{-1}},\ldots,\overset{M+m}{\check{1}},\ldots,0), \\
   -e_{M+l} + e_{M+m} &= (0,\ldots,0 \mid 0,\ldots,\overset{M+l}{\breve{-1}},\ldots,\overset{M+m}{\check{1}},\ldots,0)
   \end{aligned}$$
   をこの順番で L の末尾に加える．
2. 最初に行番号を 0 にするために $-e_0 + e_M = (-1,0,\ldots,0 \mid 1,0,\ldots,0)$ を L の末尾に加える．

3. 最後にプログラムを停止するために $e_1 - e_{M+N} = (0,1,0,\dots,0 \mid 0,\dots 0,-1)$ を L の末尾に加える． $\square$

例 1.4. Minsky 機械のプログラム P を次のものとする．

$$
\begin{array}{ll}
(0) & \texttt{jnzdec}\,\mathcal{R}_0,(1),(3) \\
(1) & \texttt{inc}\,\mathcal{R}_1,(2) \\
(2) & \texttt{inc}\,\mathcal{R}_1,(0)
\end{array}
$$

このプログラムは入力を 2 倍する関数 $f(x) = 2x$ を計算するプログラムである．このプログラムに対応する vector game のリスト L は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
v_1 =& (-1,0 \mid -1,1,0,0) \\
v_2 =& \ \ (0,0 \mid -1,0,0,1) \\
v_3 =& \ \ (0,1 \mid 0,-1,1,0) \\
v_4 =& \ \ (0,1 \mid 1,0,-1,0) \\
v_5 =& (-1,0 \mid 1,0,0,0) \\
v_6 =& \ \ (0,1 \mid 0,0,0,-1).
\end{aligned}
$$

これを $v = (2+1,0 \mid 0,0,0,0)$ から開始すると

$$
\begin{aligned}
(3,0 \mid 0,0,0,0) &\xrightarrow{+v_5} (2,0 \mid 1,0,0,0) \xrightarrow{+v_1} (1,0 \mid 0,1,0,0) \xrightarrow{+v_3} (1,1 \mid 0,0,1,0) \\
&\xrightarrow{+v_4} (1,2 \mid 1,0,0,0) \xrightarrow{+v_1} (0,2 \mid 0,1,0,0) \xrightarrow{+v_3} (0,3 \mid 0,0,1,0) \\
&\xrightarrow{+v_4} (0,4 \mid 1,0,0,0) \xrightarrow{+v_2} (0,4 \mid 0,0,0,1) \xrightarrow{+v_6} (0,5 \mid 0,0,0,0)
\end{aligned}
$$

で停止し，入力 2 に対する P の出力値は $5-1=4$ であるとわかる．

問題 1.5 (fraction game (rational game)).

Input: 正整数 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ と有限個の正の有理数のリスト $q_1, q_2, \dots, q_k \in \mathbb{Q}_{>0}$

Question: n に対し「$q_i n \in \mathbb{Z}$ を満たすような最初の q_i を n にかける」という操作を無限に繰り返すことはできるか？

系 1.6 (Conway [3], 1972). fraction game は決定不能である．

証明. 任意の有理数 $q \in \mathbb{Q}$ は次の形に一意的に素因数分解できる:

$$q = 2^{e_2} 3^{e_3} 5^{e_5} \cdots \quad (e_p \in \mathbb{Z}).$$

よって，写像 $f\colon \mathbb{Z}^d \to \mathbb{Q}_{>0}$ を $v = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \mathbb{Z}^d$ に対し $f(v) := 2^{x_1} 3^{x_2} 5^{x_3} \cdots \in \mathbb{Q}_{>0}$ と定めれば，$v \in \mathbb{N}^d \iff f(v) \in \mathbb{Z}$ だから

$$
\begin{aligned}
& v \text{ から始まる vector game } v_1, \dots, v_k \text{ が停止する} \\
\iff & f(v) \text{ から始まる fraction game } f(v_1), \dots, f(v_k) \text{ が停止する}
\end{aligned}
$$

となる． $\square$

例 1.7. 例 1.4 のベクトルのリスト L を有理数に書き直すと，$2^3 = 8$ から始まる fraction game

$$
\begin{aligned}
q_1 &= 2^{-1}3^0 5^{-1}7^1 11^0 13^0 = \frac{7}{10}\\
q_2 &= 2^0 3^0 5^{-1}7^0 11^0 13^1 = \frac{13}{5}\\
q_3 &= 2^0 3^1 5^0 7^{-1}11^1 13^0 = \frac{33}{7}\\
q_4 &= 2^0 3^1 5^1 7^0 11^{-1}13^0 = \frac{15}{11}\\
q_5 &= 2^{-1}3^0 5^1 7^0 11^0 13^0 = \frac{5}{2}\\
q_6 &= 2^0 3^1 5^0 7^0 11^0 13^{-1} = \frac{3}{13}
\end{aligned}
$$

を得る．先程と同様にして $8 \xrightarrow{q_5} 20 \xrightarrow{q_1} \cdots \xrightarrow{q_6} 3^5 = 243$ で停止する．

余談 1.8. John H. Conway は，fraction game で Minsky 機械の計算をシミュレートできることを利用して，分数だけを使って計算するプログラミング言語 **Fractran** を作った．[*2]Fractran はジョーク言語ないし難解言語の一種である．興味のある読者は Conway の論文 [4] を参照のこと．

2 一般化 Collatz 問題

Collatz 予想とは，次のような数学の予想である．

予想 2.1. 自然数上の関数 $T\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を

$$
T(x) := \begin{cases} 3x+1 & \text{if } x \text{ が奇数,} \\ x/2 & \text{if } x \text{ が偶数} \end{cases}
$$

と定める．このとき，任意の正整数 n に対し，ある k が存在して $T^k(n) = \underbrace{T(T(\cdots T}_{k}(n)\cdots)) = 1$ となるであろう．

この予想そのものは非常に難しく，2018 年現在未解決であるが，本節ではこの予想を一般化した決定問題を考え，その決定不能性を証明する．

具体的には次のような問題である．

問題 2.2 (一般化 Collatz 問題 (generalized Collatz problem)).

Input: 正整数 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ と有理数 $a_0, \ldots, a_{m-1}, b_0, \ldots, b_{m-1} \in \mathbb{Q}$ であって，$n \equiv r \pmod m$ ならば $a_r n + b_r \in \mathbb{Z}$ となるようなもの

Question: 全ての正整数 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ について「$n \equiv r \pmod m$ ならば $a_r n + b_r$ を改めて n とおく」という操作を繰り返すといずれ 1 に到達するか？

例 2.3. オリジナルの Collatz 予想は $m = 2, a_0 = 1/2, b_0 = 0, a_1 = 3, b_1 = 1$ の場合に相当する．(当たり前だが，この入力に対する答えが Yes か No かは未解決である．)

[*2] Fractran という名称はプログラミング言語 Fortran のもじりらしい．

定理 2.4 (Conway [3], 1972). 一般化 Collatz 問題は決定不能である．

証明．Kurtz と Simon の論文 [2] に沿って証明する．

仮に一般化 Collatz 問題が決定可能だったとすると，Minsky 機械の停止問題も決定可能となってしまうことを示す．任意に Minsky 機械のプログラム P をとる．vector game, fraction game の決定不能性の証明と同様にして P に対応する有理数のリスト $q_1 = n_1/d_1, q_2 = n_2/d_2, \ldots, q_k = n_k/d_k$ (a_i と d_i は互いに素な正整数) をとる．$m := \operatorname{lcm}(d_1, d_2, \ldots, d_k)$ とおく．各 $r = 0, 1, \ldots, m-1$ に対し，$b_r := 0$ と定める．a_r については次の手順に従って定める:

1. 各 $i = 1, 2, \ldots, k$ に対し，d_i のそれぞれの倍数 $cd_i < m$ $(c = 0, 1, \ldots)$ について，a_{cd_i} が未定義ならば $a_{cd_i} := q_i$ と定義する．
2. 3 の冪 $3^c < m$ $(c = 1, 2, \ldots)$ について，$a_{3^c} := 1/3$ と定義する．[*3]
3. 未定義のまま残った a_r は全て 1 とする．

このように定義すると，任意の正整数 n に対して「$q_i n \in \mathbb{Z}$ となる最初の q_i をかける」という操作と「$n \equiv r \pmod{m}$ ならば $a_r n + b_r$ を改めて n とおく」という操作は同じになる．$q_i n \in \mathbb{Z}$ となる q_i が存在しないならば，それは P が停止したことを意味する．$\mathcal{R}_1$ の値を出力値とするという条件からこのとき n は 3 の冪でなければならず，a_r の定め方から 1 に到達するまで 3 で割られ続ける．したがって，一般化 Collatz 問題 $a_0, \ldots, a_{m-1}, b_0, \ldots, b_{m-1}$ が 1 に到達するかを調べれば P の停止性がわかる． □

参考文献

[1] y., カウンター機械 (レジスター機械) (2018), `http://iso.2022.jp/math/undecidable-problems/files/counter-machine.pdf`.

[2] S. A. Kurtz, J. Simon, The Undecidability of the Generalized Collatz Problem, *Theory and Applications of Models of Computation*, Lecture Notes in Comput. Sci., vol. 4484, Springer, Berlin, Heidelberg, 2007, pp. 542–553, `https://doi.org/10.1007/978-3-540-72504-6_49`.

[3] J. H. Conway, Unpredictable Iterations, in Proc. 1972 Number Theory Conference, University of Colorado, Boulder, CO, 1972, 49–52.
(reprint version is available in: J. C. Lagarias (ed.), *The Ultimate Challenge: the* $3x+1$ *problem*, Amer. Math. Soc., 2010, 219–223.)

[4] J. H. Conway, FRACTRAN: A Simple Universal Programming Language for Arithmetic, in Open Problems in Communication and Computation (T. M. Cover and B. Gopinath, Eds.), Springer-Verlag, 1987, 4–26.
(reprint version is available in: J. C. Lagarias (ed.), *The Ultimate Challenge: the* $3x+1$ *problem*, Amer. Math. Soc., 2010, 249–264.)

[5] P. Michel, M. Margenstern, Generalized $3x+1$ functions and the theory of computation, in J. C. Lagarias (ed.), *The Ultimate Challenge: the* $3x+1$ *problem*, Amer. Math. Soc., 2010, 105–127.

[*3] vector game の決定不能性の証明から，d_i が 3 の冪となるような i は存在しないので，このように定義することができる．

変更履歴

2018/07/04　公開

2018/07/04　証明を修正