直観主義論理入門

y.*

2019 年 7 月 15 日

最終更新日: 2019 年 7 月 15 日

概要

我々が普段数学をする際に (暗黙に) 用いている論理を古典論理という．直観主義は構成的な証明のみを証明と認める立場であり，「存在しないと仮定すると矛盾する」という形の存在証明を認めない．そのため，直観主義論理では古典論理よりも証明できることは少なくなる．しかし，直観主義論理を「構成的な証明が存在するか否かを判断するための枠組み」とみなすことで，直観主義者でない人々にとっても役に立つ結果を導くことができる．

本稿では直観主義論理の最も簡単な場合である直観主義命題論理を扱う．直観主義論理の証明体系 **LJ** を導入し，Kripke 意味論に関する健全性と完全性を証明した後，古典論理の定理のうち何が直観主義論理で証明できて何が証明できないのか，ということを多くの具体例を通して確かめる．

1 「構成的な証明がないこと」を証明するには？

数学の定理の中には存在定理と呼ばれる種類のものがある．これは「〜が存在する」という形の定理で，例えば中間値の定理や Brouwer の不動点定理などがこれにあたる．もう少し形式的に言えば，存在定理とは $\exists x\varphi(x)$ という形の論理式である．存在定理の証明は「構成的な証明」と「非構成的な証明」に分類することができる．構成的な証明とは，$\varphi(t)$ を成り立たせるような t を与えることで $\exists x\varphi(x)$ を結論する証明である．非構成的な証明の例としては，以下の有名なものがある．

定理 1.1. α^β が有理数となるような無理数 α, β が存在する．

証明． $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ は有理数であるか無理数であるかのいずれかである．もし有理数ならば，$\alpha = \beta = \sqrt{2}$ が定理の条件をみたす．もし無理数ならば，$\alpha = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, \beta = \sqrt{2}$ とおけば $\alpha^\beta = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$ は有理数である．いずれにせよ定理は正しい． □

この証明は $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が結局有理数なのか無理数なのかについては何も述べておらず，定理の主張をみたす無理数 α, β をこの証明から読み取ることはできない．[*1]

同じ存在定理の証明であっても，非構成的な証明からよりも構成的な証明からの方が有益な情報を得られることが多い．したがって，ある存在定理が「構成的な証明を持つか否か」というのはとても自然な疑問である．この疑問に答えるにはどうすればよいだろうか？ 定理が構成的な証明を持つ場合にはそれを示すのは容易である: 単に構成的な証明を書き下せばよい．しかし，構成的な証明を持たない場合には，いったい

* http://iso.2022.jp/

[*1] 実際には，Gelfond-Schneider の定理によって $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ は無理数である (それどころか超越数である) ことが知られている．

どのようにしてそのことを「証明」すればよいのだろう？ この疑問に答えるために，本稿では**直観主義論理** (intuitionistic logic) を利用する．直観主義論理は構成的な証明のみを証明と認める論理体系であり，背理法や排中律を証明中で利用することができない．[*2]標語的に言えば

$$\text{直観主義論理} = \text{古典論理} - \text{背理法}$$

ということである．

さて，本稿では直観主義論理の一番簡単な場合である**直観主義命題論理** (intuitionistic propositional logic) を考え，命題論理式が「構成的な証明を持つか否かを判断するための枠組み」を構築したい．そのための作戦は以下である．

1.「構成的な証明」を定義する (2 節).
2. 命題論理式に真偽値を割り当てる「モデル」を定義する (3 節).
3.「構成的に証明できる」ならば「任意のモデルで成り立つ」ことを証明する (4 節).
4.「任意のモデルで成り立つ」ならば「構成的に証明できる」ことを証明する (5 節).

これが達成できれば，3 よりある命題論理式 φ が構成的に証明できないことを「φ が成り立たないモデルを作る」ことによって証明できる．この方法の最も重要な点は，「構成的な証明が<u>存在しない</u>」という主張が「成り立たないモデルが<u>存在する</u>」という主張に帰着されていることである．また，4 によってこの方法がどんな論理式に対しても通用することがわかる．

2 証明体系 LJ

ここでは「構成的な証明」に相当する証明体系 **LJ** を定義する．

記法 2.1. 2 つの記号列 E_1, E_2 が記号列として等しいことを $E_1 \equiv E_2$ で表す．

まず，本稿の全体にわたって用いる記号を定義しておく．

定義 2.2 (記号). 本稿では次の記号を用いる．

- 可算個の**命題変数** (propositional variable) $\mathrm{PV} = \{p, q, r, \dots\}$,
- **命題定数** (propositional constant) $\perp$,
- **論理結合子** (logical connective) $\wedge, \vee, \rightarrow$.

これらの記号を用いて，命題論理式を定義する．

定義 2.3 (命題論理式). **命題論理式** (propositional formula) または単に**論理式** (formula) は次のように帰納的に定義される．

1. 命題定数 $\perp$ は論理式である．
2. 各命題変数 $p \in \mathrm{PV}$ に対し，p は論理式である．
3. φ, ψ が論理式ならば $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi)$ は論理式である．

[*2] **直観主義** (intuitionism) と**構成主義** (constructivism) は本来は主義としては区別すべきであろうが，本稿では特に区別せず用いることにする．

4. 以上によって作られるものだけが論理式である．

例えば，$p, q, r \in \mathrm{PV}$ に対して $(((p \wedge (q \to r)) \wedge (r \to \bot)) \to (q \to (p \vee \bot)))$ は論理式である．が，見た目が煩雑になるので適宜括弧を省略して $p \wedge (q \to r) \wedge (r \to \bot) \to q \to p \vee \bot$ などと書くことにする．[*3]

定義 2.2 では否定を表す記号 $\neg$ は用意しなかった．直観主義論理では次のようにして否定を略記法として導入するのが普通である．

記法 2.4 (否定). 論理式 φ に対して，$\varphi \to \bot$ を $\neg\varphi$ と略記することにする．

この記法のもとでは背理法 $(\neg\varphi \to \bot) \to \varphi$ と二重否定除去 $\neg\neg\varphi \to \varphi$ は全く同じ論理式となることに注意する．

直観主義命題論理の証明体系 **LJ** を定義するために，シークエントを導入する．

定義 2.5 (シークエント). **シークエント** (sequent, 推件) とは，論理式の有限集合 (空でもよい) Γ と論理式 φ の組を $\Rightarrow$ の左右に配置した表記

$$\Gamma \Rightarrow \varphi$$

のことである．$\Gamma = \emptyset$ のときは単に $\Rightarrow \varphi$ と書く．$\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ を論理式の有限集合，$\varphi_1, \dots, \varphi_m, \psi$ を論理式とするとき，$\varphi_1, \dots, \varphi_m, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n \Rightarrow \psi$ などと書いたら $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\} \cup \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n \Rightarrow \psi$ を意味するものとする．また，$\Gamma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ $(n > 0)$ のとき

$$\bigwedge \Gamma \equiv \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n, \qquad \bigwedge \emptyset \equiv \neg\bot,$$
$$\bigvee \Gamma \equiv \varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n, \qquad \bigvee \emptyset \equiv \bot$$

と定義する．[*4]

定義 2.6 (証明体系 LJ). **推論規則** (inference rule) とは，いくつかのシークエント $S, S_1, \dots, S_n$ $(n \geq 0)$ に対して

$$\frac{S_1 \quad \cdots \quad S_n}{S} \text{ (規則名)}$$

の形をした図形である．$S_1, \dots, S_n$ を**前提** (premise) と呼び，S を**結論** (conclusion) と呼ぶ．推論規則は $S_1, \dots, S_n$ から S を導いてよいことを意味している．推論規則の結論はまた別の推論規則の前提にすることができ，推論規則の積み重ねによって作られる図形を導出図という．図中の全ての推論規則の前提が何らかの推論規則の結論になっているような有限の導出図を**証明図** (proof figure) または**証明木** (proof tree) といい，証明図の中でどの推論規則の前提にもなっていない唯一の結論を証明図の**根** (root) という．

直観主義命題論理の証明体系 **LJ** とは，図 1 の推論規則の集まりをいう．シークエント $\Gamma \Rightarrow \varphi$ を根とする証明図が存在するとき，$\Gamma \Rightarrow \varphi$ は **LJ** から**証明可能** (provable) であるといい，このことを記号

$$\mathbf{LJ} \vdash \Gamma \Rightarrow \varphi$$

で表す．

[*3] $(\varphi \wedge \psi) \wedge \theta$ と $\varphi \wedge (\psi \wedge \theta)$ を区別しなくてよい理由は後に注意 2.8 で述べる．

[*4] $\bigwedge \Gamma, \bigvee \Gamma$ の定義は Γ の元の並べ方に依存する．そのため，きちんと定義するにはあらかじめ命題論理式全体の集合を整列しておき，その順序に従って Γ の元を並べるなどの工夫が必要である．どのような並べ方をしても後の議論に影響しないことは注意 2.8 を参照のこと．

論理式 φ が直観主義命題論理において証明可能であるとは，$\mathbf{LJ} \vdash \;\Rightarrow \varphi$ となることをいう．

シークエント $\Gamma \Rightarrow \varphi$ は論理式 $\bigwedge \Gamma \to \varphi$ をばらして並べたものであると思ってよい．

$$\frac{}{\Gamma \Rightarrow \varphi}\ (\textsc{Init})\ (\text{ただし } \varphi \in \Gamma) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \bot}{\Gamma \Rightarrow \varphi}\ (\bot)$$

$$\frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \theta}{\varphi \land \psi, \Gamma \Rightarrow \theta}\ (\land\mathrm{L}) \qquad \frac{\psi, \Gamma \Rightarrow \theta}{\varphi \land \psi, \Gamma \Rightarrow \theta}\ (\land\mathrm{L}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \varphi \quad \Gamma \Rightarrow \psi}{\Gamma \Rightarrow \varphi \land \psi}\ (\land\mathrm{R})$$

$$\frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \theta \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \theta}{\varphi \lor \psi, \Gamma \Rightarrow \theta}\ (\lor\mathrm{L}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \varphi}{\Gamma \Rightarrow \varphi \lor \psi}\ (\lor\mathrm{R}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \psi}{\Gamma \Rightarrow \varphi \lor \psi}\ (\lor\mathrm{R})$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \varphi \quad \psi, \Delta \Rightarrow \theta}{\varphi \to \psi, \Gamma, \Delta \Rightarrow \theta}\ (\to\mathrm{L}) \qquad \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \psi}{\Gamma \Rightarrow \varphi \to \psi}\ (\to\mathrm{R})$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \varphi \quad \varphi, \Delta \Rightarrow \psi}{\Gamma, \Delta \Rightarrow \psi}\ (\textsc{Cut})$$

図 1　**LJ** の推論規則

例 2.7 (LJ における証明の例).　例として $\mathbf{LJ} \vdash p \land q, q \to r \Rightarrow p \to r$ であることを証明してみよう．そのためには例えば次のような証明図を作ればよい．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p, q \Rightarrow q}\ (\textsc{Init}) \quad \dfrac{}{r, p, q \Rightarrow r}\ (\textsc{Init})}{p, q, q \to r \Rightarrow r}\ (\to\mathrm{L})}{q, q \to r \Rightarrow p \to r}\ (\to\mathrm{R})}{p \land q, q \to r \Rightarrow p \to r.}\ (\land\mathrm{L})$$

注意 2.8.　3 つ以上の論理式を $\land$ または $\lor$ で結ぶとき，それらの順序や括弧の付け方は議論に本質的には影響しない．このことは **LJ** において $\land, \lor$ の結合法則と交換法則に相当するシークエントが証明できることからわかる．実際，例えば $\land$ については

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \Rightarrow \varphi}\ (\textsc{Init})}{\varphi \land \psi \Rightarrow \varphi}\ (\land\mathrm{L})}{(\varphi \land \psi) \land \theta \Rightarrow \varphi}\ (\land\mathrm{L}) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\psi \Rightarrow \psi}\ (\textsc{Init})}{\varphi \land \psi \Rightarrow \psi}\ (\land\mathrm{L})}{(\varphi \land \psi) \land \theta \Rightarrow \psi}\ (\land\mathrm{L}) \quad \dfrac{\dfrac{}{\theta \Rightarrow \theta}\ (\textsc{Init})}{(\varphi \land \psi) \land \theta \Rightarrow \theta}\ (\land\mathrm{L})}{(\varphi \land \psi) \land \theta \Rightarrow \psi \land \theta}\ (\land\mathrm{R})}{(\varphi \land \psi) \land \theta \Rightarrow \varphi \land (\psi \land \theta),}\ (\land\mathrm{R})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\psi \Rightarrow \psi}\ (\textsc{Init})}{\varphi \land \psi \Rightarrow \psi}\ (\land\mathrm{L}) \quad \dfrac{\dfrac{}{\varphi \Rightarrow \varphi}\ (\textsc{Init})}{\varphi \land \psi \Rightarrow \varphi}\ (\land\mathrm{L})}{\varphi \land \psi \Rightarrow \psi \land \varphi}\ (\land\mathrm{R})$$

である．$\lor$ についても同様のことが証明できる．

3　Kripke 意味論

ここでは直観主義命題論理の意味論を Kripke モデルを用いて与える．直観主義論理の意味論には Heyting 代数を用いたものもあるが，束論に不慣れな初学者のために本稿では前提知識が少なくて済む Kripke モデルによる意味論を採用する．

定義 3.1 (Kripke モデル). **Kripke モデル** (Kripke model) とは，空でない集合 W とその上の (半) 順序関係 $\le$，および関数 $V\colon \mathrm{PV} \to \mathcal{P}(W)$ であって以下の条件 (遺伝性) をみたす 3 つ組 $(W, \le, V)$ のことをいう:

(遺伝性) 任意の $p \in \mathrm{PV}$ と $w \in V(p)$ に対し，$w \le w'$ ならば $w' \in V(p)$.

W の元を**可能世界** (possible world) または**状態** (state)，$\le$ を**到達可能関係** (accessibility relation)，V を**付値** (valuation) という．

定義 3.2. $M = (W, \le, V)$ を Kripke モデル，φ を命題論理式とする．φ が世界 $w \in W$ で成り立つことを表す関係 $w \models \varphi$ を，φ の構造に関する帰納法で次のように定める．

- $w \not\models \bot$，$w \models \top$.
- $w \models p \;:\Longleftrightarrow\; w \in V(p)$.
- $w \models \varphi \wedge \psi \;:\Longleftrightarrow\; w \models \varphi$ かつ $w \models \psi$.
- $w \models \varphi \vee \psi \;:\Longleftrightarrow\; w \models \varphi$ または $w \models \psi$.
- $w \models \varphi \to \psi \;:\Longleftrightarrow\; w \le w'$ なる任意の $w' \in W$ について $w' \not\models \varphi$ または $w' \models \psi$.

任意の $w \in W$ で $w \models \varphi$ となることを $M \models \varphi$ と書く．任意の Kripke モデル M で $M \models \varphi$ となることを $\models \varphi$ と書く．

遺伝性は命題変数だけでなく任意の論理式について成り立つ．

補題 3.3 (遺伝性). 任意の命題論理式 φ と Kripke モデル $M = (W, \le, V)$，世界 $w \in W$ について，$w \models \varphi$ かつ $w \le w'$ ならば $w' \models \varphi$.

証明. φ の構造に関する帰納法で示す．

$\varphi \equiv \bot$ のとき． $w \not\models \bot$ なのでよい．
$\varphi \equiv p \in \mathrm{PV}$ のとき． (遺伝性) の定義そのものである．
$\varphi \equiv \psi \wedge \theta$ のとき． $w \models \psi \wedge \theta$ とすると $w \models \psi$ かつ $w \models \theta$ だから帰納法の仮定より任意の $w' \ge w$ に対し $w' \models \psi$ かつ $w' \models \theta$，すなわち $w' \models \psi \wedge \theta$.
$\varphi \equiv \psi \vee \theta$ のとき． $w \models \psi \vee \theta$ とすると $w \models \psi$ または $w \models \theta$ だから帰納法の仮定より任意の $w' \ge w$ に対し $w' \models \psi$ または $w' \models \theta$，すなわち $w' \models \psi \vee \theta$.
$\varphi \equiv \psi \to \theta$ のとき． $w \models \psi \to \theta$ と仮定し，$w' \ge w$ に対し $w' \models \psi \to \theta$ を示す．任意に $w'' \ge w'$ をとり，$w'' \models \psi$ であるとする．このとき仮定 $w \models \psi \to \theta$ より $w'' \ge w$ に対し「$w'' \not\models \psi$ または $w'' \models \theta$」だから $w'' \models \theta$ でなければならない．$w'' \ge w'$ は任意だったから $w' \models \psi \to \theta$. □

遺伝性は感覚的には「一度確定した，あるいは証明された事実は覆らない」ということを表現しているのだということもできる．$w \models \neg\varphi$ つまり $w \models \varphi \to \bot$ は，任意の $w' \ge w$ に対し $w' \not\models \varphi$ であることと同値である．つまり「これ以降，未来永劫 φ が証明されることはない」ということであり，したがって現時点で φ であることが確信できないからといって $w \models \neg\varphi$ を結論することはできない．今はまだわからなくても，いずれ φ が正しいことが確定する日が来るかもしれないからである．

4　健全性定理

本節ではここまでに導入した **LJ** と Kripke モデルを用いて健全性定理，すなわち「証明できるなら正しい」ことを証明する．

定理 4.1 (LJ の健全性). **LJ** は Kripke 意味論に関して**健全** (sound) である．すなわち，命題論理式の任意の有限集合 Γ と任意の命題論理式 φ に対し，

$$\mathbf{LJ} \vdash \Gamma \Rightarrow \varphi \quad\Longrightarrow\quad \models \bigwedge \Gamma \to \varphi.$$

証明．シークエント $\Gamma \Rightarrow \varphi$ の証明の長さに関する帰納法で示す．証明の最後に用いられた推論規則によって場合分けする．シークエントの記号は図 1 と同じものを用いる．Kripke モデル $M = (W, \leq, V)$ と世界 $w \in W$ を任意にとる．

(Init) のとき．　任意の $w' \geq w$ について $w' \not\models \varphi$ または $w' \models \varphi$ だから $\varphi \in \Gamma$ より $w \models \bigwedge \Gamma \to \varphi$.

($\bot$) のとき．　仮に $w \not\models \bigwedge \Gamma \to \varphi$ とするとある $w' \geq w$ について $w' \models \bigwedge \Gamma$ だから $w' \not\models \bot$ と合わせて $w \not\models \bigwedge \Gamma \to \bot$ だが，これは帰納法の仮定 $w \models \bigwedge \Gamma \to \bot$ に反する．

($\wedge$L) のとき．　帰納法の仮定より $w \models \varphi \wedge \bigwedge \Gamma \to \theta$ だから任意の $w' \geq w$ について $w' \not\models \varphi$ または $w' \not\models \bigwedge \Gamma$ または $w' \not\models \theta$ である．よって $w' \not\models \varphi$ または $w' \not\models \psi$ または $w' \not\models \bigwedge \Gamma$ または $w' \not\models \theta$ なので $w \models \varphi \wedge \psi \wedge \bigwedge \Gamma \to \theta$.

($\wedge$R) のとき．　仮に $w \not\models \bigwedge \Gamma \to \varphi \wedge \psi$ とするとある $w' \geq w$ について $w' \models \bigwedge \Gamma$ かつ「$w' \not\models \varphi$ または $w' \not\models \psi$」だから，「　」内のどちらが成り立つかに応じて $w \not\models \bigwedge \Gamma \to \varphi$ または $w \not\models \bigwedge \Gamma \to \psi$ となり，いずれにせよ帰納法の仮定に反する．

($\vee$L) のとき．　仮に $w \not\models (\varphi \vee \psi) \wedge \bigwedge \Gamma \to \theta$ とするとある $w' \geq w$ について「$w' \models \varphi$ または $w' \models \psi$」かつ $w' \models \bigwedge \Gamma$ かつ $w' \not\models \theta$ だから，「　」内のどちらが成り立つかに応じて $w \not\models \varphi \wedge \bigwedge \Gamma \to \theta$ または $w \not\models \psi \wedge \bigwedge \Gamma \to \theta$ となり，いずれにせよ帰納法の仮定に反する．

($\vee$R) のとき．　帰納法の仮定より $w \models \bigwedge \Gamma \to \varphi$ だから任意の $w' \geq w$ について $w' \not\models \bigwedge \Gamma$ または $w' \models \varphi$ である．よって $w \not\models \bigwedge \Gamma$ または $w \models \varphi$ または $w \models \psi$ なので $w \models \bigwedge \Gamma \to \varphi \vee \psi$.

($\to$L) のとき．　仮に $w \not\models (\varphi \to \psi) \wedge \bigwedge \Gamma \wedge \bigwedge \Delta \to \theta$ とすると $w \models \varphi \to \psi$ かつ $w \models \bigwedge \Gamma$ かつ $w \models \bigwedge \Delta$ かつ $w \not\models \theta$ だから任意の $w' \geq w$ に対し「$w' \not\models \varphi$ または $w' \models \psi$」であり，遺伝性から $w' \models \bigwedge \Delta$ かつ $w' \not\models \theta$ である．よって「　」内のどちらが成り立つかに応じて $w \not\models \bigwedge \Gamma \to \varphi$ または $w \not\models \psi \wedge \bigwedge \Delta \to \theta$ が成り立つ．

($\to$R) のとき．　仮に $w \not\models \bigwedge \Gamma \to (\varphi \to \psi)$ とするとある $w' \geq w$ について $w' \models \bigwedge \Gamma$ かつ $w' \not\models \varphi \to \psi$ だから，ある $w'' \geq w'$ について $w'' \models \varphi$ かつ $w'' \not\models \psi$ となり，また遺伝性から $w'' \models \bigwedge \Gamma$ である．このとき推移性から $w'' \geq w$ であるので $w \not\models \varphi \wedge \bigwedge \Gamma \to \psi$ となり，帰納法の仮定に反する．

(Cut) のとき．　仮に $w \not\models \bigwedge \Gamma \wedge \bigwedge \Delta \to \psi$ とするとある $w' \geq w$ について $w' \models \bigwedge \Gamma$ かつ $w' \models \bigwedge \Delta$ かつ $w' \not\models \psi$ である．よって $w' \not\models \varphi$ と $w' \models \varphi$ のいずれが成り立つかに応じて $w \not\models \bigwedge \Gamma \to \varphi$ または $w \not\models \varphi \wedge \bigwedge \Delta \to \psi$ となり，いずれにせよ帰納法の仮定に反する．　□

5　完全性定理

本節では完全性定理，すなわち「正しいことは証明できる」ことを証明する．

定理 5.1 (LJ の完全性).　**LJ** は Kripke 意味論に関して完全 (complete) である．すなわち，命題論理式の任意の有限集合 Γ と任意の命題論理式 φ に対し，

$$\mathbf{LJ} \vdash \Gamma \Rightarrow \varphi \quad \Longleftarrow \quad \models \bigwedge \Gamma \to \varphi.$$

証明. 対偶を示す．$\mathbf{LJ} \nvdash \Gamma \Rightarrow \varphi$ と仮定する．Σ を $\bigwedge \Gamma \to \varphi$ の**部分論理式** (subformula) の全体の集合とする．例えば $\Gamma = \{\neg q, p \to q\}$，$\varphi \equiv \neg p$ なら

$$\Sigma = \{\neg q \wedge (p \to q) \to \neg p, \neg q \wedge (p \to q), \neg q, q, \bot, p \to q, p, \neg p\}$$

である．部分論理式の集合 $U, V \subseteq \Sigma$ に対し，

- (U, V) が**無矛盾** (consistent) $:\Longleftrightarrow$ $\mathbf{LJ} \nvdash U \Rightarrow \bigvee V$，
- (U, V) が**極大無矛盾** (maximal consistent) $:\Longleftrightarrow$ (U, V) が無矛盾かつ $U \cup V = \Sigma$

と定義する．(Init) 規則があるので，(U, V) が無矛盾ならば $U \cap V = \emptyset$ である．

補題 5.2.　無矛盾な任意の組 (U, V) は極大無矛盾な組 (U', V') で $U \subseteq U', V \subseteq V'$ なるものに拡大できる．

補題の証明. $U \cup V = \Sigma$ ならばすべきことは何もない．そうでないと仮定し，論理式 $\theta \in \Sigma \setminus (U \cup V)$ をとる．このとき 2 つの組 $(U \cup \{\theta\}, V)$ と $(U, V \cup \{\theta\})$ の少なくとも一方は無矛盾である．実際，どちらも無矛盾でないと仮定すると，まず $(U \cup \{\theta\}, V)$ が無矛盾でないことから $\mathbf{LJ} \vdash \theta, U \Rightarrow \bigvee V$ となり，また $(U, V \cup \{\theta\})$ が無矛盾でないことから $\mathbf{LJ} \vdash U \Rightarrow \bigvee V \vee \theta$ となるが，このとき

$$\dfrac{U \Rightarrow \bigvee V \vee \theta \qquad \dfrac{\dfrac{}{\bigvee V, U \Rightarrow \bigvee V}\,(\textsc{Init}) \qquad \theta, U \Rightarrow \bigvee V}{\bigvee V \vee \theta, U \Rightarrow \bigvee V}\,(\vee\mathrm{L})}{U \Rightarrow \bigvee V}\,(\textsc{Cut})$$

から $\mathbf{LJ} \vdash U \Rightarrow \bigvee V$ となり，(U, V) が無矛盾であったという仮定に矛盾する．Σ は有限集合なので以上のプロセスを $U \cup V = \Sigma$ となるまで繰り返せばよい．　□

Kripke モデル $M^* = (W^*, \subseteq, V^*)$ を

$$W^* = \{\, U \subseteq \Sigma \mid (U, \Sigma \setminus U) \text{ は極大無矛盾} \,\},$$
$$V^*(p) = \{\, U \in W \mid p \in U \,\}$$

で定める．到達可能関係を包含関係で定めているので，M^* は明らかに遺伝性をみたす．

補題 5.3.　$U \in W^*$ に対し，以下が成り立つ．

1. $\bot \notin U$.
2. $\psi \wedge \theta \in \Sigma$ に対し，$\psi \wedge \theta \in U \iff \psi, \theta \in U$.
3. $\psi \vee \theta \in \Sigma$ に対し，$\psi \vee \theta \in U \iff \psi \in U$ または $\theta \in U$.

4. $\psi \to \theta \in \Sigma$ に対し，$\psi \to \theta \in U \iff U \subseteq U'$ なる全ての $U' \in W^*$ に対し $\psi \notin U'$ または $\theta \in U'$.

補題の証明. $V = \Sigma \setminus U$ とおく．無矛盾性の定義から任意の $\psi \in \Sigma$ と $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in U$ について，$\mathbf{LJ} \vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_n \Rightarrow \psi$ ならば $\psi \in U$ であることに注意する．

1. 仮に $\bot \in U$ とすると

$$\dfrac{\dfrac{}{U \Rightarrow \bot}\,(\textsc{Init})}{U \Rightarrow \bigvee V}\,(\bot)$$

   より (U, V) が無矛盾であることに反するので $\bot \notin U$.

2. $\psi \wedge \theta \in U$ と仮定すると

$$\dfrac{\dfrac{}{\psi, \theta \Rightarrow \psi}\,(\textsc{Init})}{\psi \wedge \theta \Rightarrow \psi}\,(\wedge\mathrm{L}) \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{}{\psi, \theta \Rightarrow \theta}\,(\textsc{Init})}{\psi \wedge \theta \Rightarrow \theta}\,(\wedge\mathrm{L})$$

   より $\psi, \theta \in U$ であり，逆に $\psi, \theta \in U$ と仮定すると

$$\dfrac{\dfrac{}{\psi, \theta \Rightarrow \psi}\,(\textsc{Init}) \quad \dfrac{}{\psi, \theta \Rightarrow \theta}\,(\textsc{Init})}{\psi, \theta \Rightarrow \psi \wedge \theta}\,(\wedge\mathrm{R})$$

   より $\psi \wedge \theta \in U$.

3. $\psi \vee \theta \in U$ のとき，仮に $\psi, \theta \notin U$ と仮定すると

$$\dfrac{\dfrac{}{U \Rightarrow \psi \vee \theta}\,(\textsc{Init})}{U \Rightarrow \bigvee V}\,(\vee\mathrm{R})$$

   より (U, V) が無矛盾であることに反するので，$\psi \in U$ または $\theta \in U$ のうち少なくとも一方が成り立つ．逆に $\psi \in U$ または $\theta \in U$ と仮定すると

$$\dfrac{\dfrac{}{\psi \Rightarrow \psi}\,(\textsc{Init})}{\psi \Rightarrow \psi \vee \theta}\,(\vee\mathrm{R}) \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{}{\theta \Rightarrow \theta}\,(\textsc{Init})}{\theta \Rightarrow \psi \vee \theta}\,(\vee\mathrm{R})$$

   の少なくとも一方が成り立つが，いずれにせよ $\psi \vee \theta \in U$.

4. $\psi \to \theta \in U \subseteq U'$ と仮定すると，$\psi \in U'$ ならば

$$\dfrac{\dfrac{}{\psi \Rightarrow \psi}\,(\textsc{Init}) \quad \dfrac{}{\theta \Rightarrow \theta}\,(\textsc{Init})}{\psi \to \theta, \psi \Rightarrow \theta}\,(\to\mathrm{L})$$

   だから $\theta \in U'$．逆に $\psi \to \theta \notin U$ と仮定すると，

$$\dfrac{\dfrac{\psi, U \Rightarrow \theta}{U \Rightarrow \psi \to \theta}\,(\to\mathrm{R})}{U \Rightarrow \bigvee V}\,(\vee\mathrm{R})$$

   より (U, V) が無矛盾であるためには $\mathbf{LJ} \nvdash \psi, U \to \theta$ でなければならない．よって $(U \cup \{\psi\}, \{\theta\})$ は無矛盾だから補題 5.2 より極大無矛盾な (U', V') に拡大すれば $\psi \in U' \not\ni \theta$. □

系 5.4. 任意の $\varphi \in \Sigma$ と $U \in W^*$ に対し，$U \models \varphi \iff \varphi \in U$.

いま $\mathbf{LJ} \nvdash \Gamma \Rightarrow \varphi$ より $(\Gamma, \{\varphi\})$ は無矛盾だから補題 5.2 より極大無矛盾な組 (U, V) で $\Gamma \subseteq U, \varphi \in V$ なるものに拡大できる．このとき補題 5.3 から $\bigwedge\Gamma \in U$ かつ $\bigwedge\Gamma \to \varphi \notin U$ となる．よって系 5.4 より $U \not\models \bigwedge\Gamma \to \varphi$ であるので $\not\models \bigwedge\Gamma \to \varphi$ を得る． □

完全性定理 5.1 の証明から次がわかる．

系 5.5 (直観主義命題論理の有限モデル性 (finite model property)). $\mathbf{LJ} \nvdash \Gamma \Rightarrow \varphi$ ならば，$M \not\models \bigwedge\Gamma \to \varphi$ となる Kripke モデル $M = (W, \leq, V)$ で $|W| \leq 2^{2^{|\Sigma|}}$ をみたすものが存在する．

系 5.6 (直観主義命題論理の決定可能性). 与えられた命題論理式 φ が $\mathbf{LJ}$ から証明可能かどうかを判定する問題は**決定可能** (decidable) である．すなわち，与えられた φ が $\mathbf{LJ} \vdash \ \Rightarrow \varphi$ となるかどうかを判定するアルゴリズムが存在する．

証明の概略. $|W| \leq 2^{2^{|\Sigma|}}$ をみたす Kripke モデル $M = (W, \leq, V)$ は (同型を除いて) 有限個しかないから，その中で $M \not\models \varphi$ となるものがひとつでもあるかどうかをチェックすればよい ($M \models \varphi$ が実際に有限ステップで判定可能な条件であることに注意する)． □

述語論理に関しては古典論理の場合と同様に決定不能であることが知られている．

事実 5.7 (直観主義述語論理の決定不能性). 与えられた論理式 φ の直観主義述語論理における証明可能性は決定不能である．

本稿の最初に直観主義論理では構成的な証明しか認められないと述べたが，実際にそのことを保証するのが次の定理である．

定理 5.8 (選言特性 (disjunction property)). $\mathbf{LJ} \vdash \ \Rightarrow \varphi \vee \psi$ ならば $\mathbf{LJ} \vdash \ \Rightarrow \varphi$ または $\mathbf{LJ} \vdash \ \Rightarrow \psi$.

証明. 対偶を示す．$\mathbf{LJ} \nvdash \ \Rightarrow \varphi$ かつ $\mathbf{LJ} \nvdash \ \Rightarrow \psi$ とすると，完全性定理 5.1 より Kripke モデル $M_1 = (W_1, \leq_1, V_1), M_2 = (W_2, \leq_2, V_2)$ が存在してある $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$ について $w_1 \not\models \varphi, w_2 \not\models \psi$ となる．よって Kripke モデル $M = (W, \leq, V)$ を

$$\begin{aligned} W &= \{w_0\} \sqcup W_1 \sqcup W_2, \\ \leq &= \{(w_0, w_0), (w_0, w_1), (w_0, w_2)\} \cup \leq_1 \cup \leq_2 \text{ の推移閉包}, \\ V(p) &= V_1(p) \cup V_2(p) \end{aligned}$$

とおけば M においても $w_1 \not\models \varphi, w_2 \not\models \psi$ が成り立ち，遺伝性から $w_0 \not\models \varphi \vee \psi$ すなわち $M \not\models \varphi \vee \psi$ が成り立つ (図 2)． □

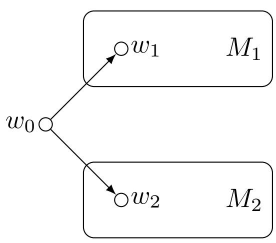

図 2　M の構成

本稿では扱わないが，述語論理の場合には存在文を証明するためには証拠となる項を具体的に見出さなければならないことが示せる．証明は例えば小野 [6]，鹿島 [3]，照井 [7] などを参照のこと．

事実 5.9 (直観主義述語論理の存在特性 (existence property)). 形式体系 **LJ** を述語論理に拡張すると次が成り立つ．

$$\mathbf{LJ} \vdash \Rightarrow \exists x \varphi(x) \text{ ならばある項 } t \text{ が存在して } \mathbf{LJ} \vdash \Rightarrow \varphi(t).$$

6　具体例

それではいよいよ健全性定理 4.1 を用いて，直観主義論理で証明できない古典論理の定理の具体例を見ていこう．

例 6.1 (二重否定除去・排中律). 以下が成り立つ．

1. 任意の命題論理式 φ について $\mathbf{LJ} \vdash \Rightarrow \varphi \to \neg\neg\varphi$.
2. $\mathbf{LJ} \nvdash \Rightarrow \neg\neg p \to p$.
3. $\mathbf{LJ} \nvdash \Rightarrow p \lor \neg p$.

証明.
1. 次のようにすればよい．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \Rightarrow \varphi}\,(\textsc{Init}) \qquad \dfrac{}{\bot \Rightarrow \bot}\,(\textsc{Init})}{\varphi \to \bot, \varphi \Rightarrow \bot}\,(\to\mathrm{L})}{\varphi \Rightarrow (\varphi \to \bot) \to \bot}\,(\to\mathrm{R})}{\Rightarrow \varphi \to ((\varphi \to \bot) \to \bot).}\,(\to\mathrm{R})$$

2. Kripke モデル $M = (W, \leq, V)$ を $W = \{w_0, w_1\}, w_0 \leq w_1, V(p) = \{w_1\}$ で定める (図 3)．このとき $w_0 \not\models p \to \bot, w_1 \not\models p \to \bot$ より $w_0 \models (p \to \bot) \to \bot$ だが，一方で $w_0 \not\models p$ なので $w_0 \not\models ((p \to \bot) \to \bot) \to p$.
3. 上と同じ Kripke モデル M において $w_0 \not\models p$ かつ $w_0 \not\models \neg p$ だから $w_0 \not\models p \lor \neg p$. □

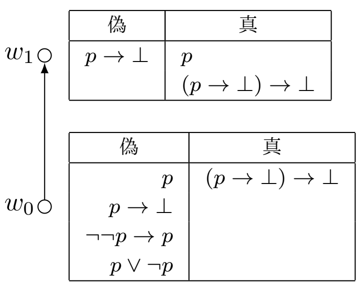

図 3　二重否定除去・排中律の反例モデル

例 6.2 (対偶). 以下が成り立つ．

1. 任意の命題論理式 φ, ψ について $\mathbf{LJ} \vdash \Rightarrow (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$.
2. $\mathbf{LJ} \nvdash \Rightarrow (\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$.

証明. 1. 次のようにすればよい．

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \Rightarrow \varphi}\,(\textsc{Init}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\psi \Rightarrow \psi}\,(\textsc{Init}) \qquad \dfrac{}{\bot \Rightarrow \bot}\,(\textsc{Init})}{\psi, \neg\psi \Rightarrow \bot}\,(\to\mathrm{L})}{\varphi \to \psi, \varphi, \neg\psi \Rightarrow \bot}\,(\to\mathrm{L})}{\neg\psi, \varphi \to \psi \Rightarrow \neg\varphi}\,(\to\mathrm{R})}{\varphi \to \psi \Rightarrow \neg\psi \to \neg\varphi}\,(\to\mathrm{R})}{\Rightarrow (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi).}\,(\to\mathrm{R})
$$

2. Kripke モデル $M = (W, \leq, V)$ を $W = \{w_0, w_1, w_2\}, w_0 \leq w_1 \leq w_2, V(p) = \{w_1, w_2\}, V(q) = \{w_2\}$ で定める (図 4)．このとき $w_2 \not\models p \to \bot, w_2 \not\models q \to \bot$ だから遺伝性より任意の $w \in W$ について $w \models \neg p$ なので $w_0 \models \neg q \to \neg p$ であり，また $w_1 \models p, w_1 \not\models q$ より $w_0 \not\models p \to q$ だから $w_0 \not\models (\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$． □

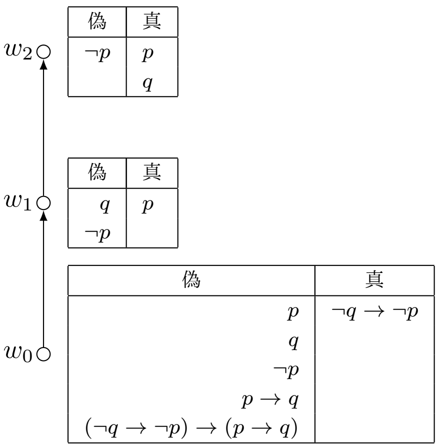

図 4　対偶の反例モデル

注意 6.3. 二重否定と対偶の証明できる側を組み合わせると

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Rightarrow \varphi \to \neg\neg\varphi}\,(\text{二重否定導入}) \qquad \dfrac{}{\varphi \to \neg\neg\varphi \Rightarrow \neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi}\,(\text{対偶})}{\neg\neg\neg\varphi \Rightarrow \neg\varphi}\,(\textsc{Cut})}{\Rightarrow \neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi}\,(\to\mathrm{R})
$$

より $\mathbf{LJ} \vdash \Rightarrow \neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$ となるので，否定の形をした論理式の二重否定は除去できることがわかる．

例 6.4 (de Morgan の法則). 任意の命題論理式 φ, ψ に対して以下が成り立つ．

1. $\mathbf{LJ} \vdash \Rightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi \to \neg(\varphi \vee \psi)$.
2. $\mathbf{LJ} \vdash \Rightarrow \neg(\varphi \vee \psi) \to \neg\varphi \wedge \neg\psi$.
3. $\mathbf{LJ} \vdash \Rightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi \to \neg(\varphi \wedge \psi)$.
4. $\mathbf{LJ} \nvdash \Rightarrow \neg(p \wedge q) \to \neg p \vee \neg q$.

証明. 1. 次のようにすればよい．

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\doubleLine
\UnaryInfC{$\varphi, \neg\varphi \Rightarrow \bot$}
\RightLabel{($\wedge$L)}
\UnaryInfC{$\varphi, \neg\varphi \wedge \neg\psi \Rightarrow \bot$}
\AxiomC{}
\doubleLine
\UnaryInfC{$\psi, \neg\psi \Rightarrow \bot$}
\RightLabel{($\wedge$L)}
\UnaryInfC{$\psi, \neg\varphi \wedge \neg\psi \Rightarrow \bot$}
\RightLabel{($\vee$L)}
\BinaryInfC{$\varphi \vee \psi, \neg\varphi \wedge \neg\psi \Rightarrow \bot$}
\RightLabel{($\to$R)}
\UnaryInfC{$\neg\varphi \wedge \neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \vee \psi)$}
\RightLabel{($\to$R)}
\UnaryInfC{$\Rightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi \to \neg(\varphi \vee \psi).$}
\end{prooftree}
$$

ただし，二重線で省略されている部分は

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Init)}
\UnaryInfC{$\varphi \Rightarrow \varphi$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Init)}
\UnaryInfC{$\bot \Rightarrow \bot$}
\RightLabel{($\to$L)}
\BinaryInfC{$\varphi, \neg\varphi \Rightarrow \bot$}
\end{prooftree}
$$

とする．

2. 次のようにすればよい．

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Init)}
\UnaryInfC{$\varphi \Rightarrow \varphi$}
\RightLabel{($\vee$R)}
\UnaryInfC{$\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi$}
\doubleLine
\UnaryInfC{$\neg(\varphi \vee \psi) \Rightarrow \neg\varphi$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Init)}
\UnaryInfC{$\psi \Rightarrow \psi$}
\RightLabel{($\vee$R)}
\UnaryInfC{$\psi \Rightarrow \varphi \vee \psi$}
\doubleLine
\UnaryInfC{$\neg(\varphi \vee \psi) \Rightarrow \neg\psi$}
\RightLabel{($\wedge$R)}
\BinaryInfC{$\neg(\varphi \vee \psi) \Rightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$}
\RightLabel{($\to$R)}
\UnaryInfC{$\Rightarrow \neg(\varphi \vee \psi) \to \neg\varphi \wedge \neg\psi.$}
\end{prooftree}
$$

ただし，二重線で省略されている部分は

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\varphi \Rightarrow \psi$}
\RightLabel{($\to$R)}
\UnaryInfC{$\Rightarrow \varphi \to \psi$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(対偶)}
\UnaryInfC{$\varphi \to \psi \Rightarrow \neg\psi \to \neg\varphi$}
\RightLabel{(Cut)}
\BinaryInfC{$\Rightarrow \neg\psi \to \neg\varphi$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Init)}
\UnaryInfC{$\neg\psi \Rightarrow \neg\psi$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Init)}
\UnaryInfC{$\neg\varphi \Rightarrow \neg\varphi$}
\RightLabel{($\to$L)}
\BinaryInfC{$\neg\psi, \neg\psi \to \neg\varphi \Rightarrow \neg\varphi$}
\RightLabel{(Cut)}
\BinaryInfC{$\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$}
\end{prooftree}
$$

とする．

3. 次のようにすればよい．

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Init)}
\UnaryInfC{$\varphi \Rightarrow \varphi$}
\RightLabel{($\wedge$R)}
\UnaryInfC{$\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi$}
\doubleLine
\UnaryInfC{$\neg\varphi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Init)}
\UnaryInfC{$\psi \Rightarrow \psi$}
\RightLabel{($\wedge$R)}
\UnaryInfC{$\varphi \wedge \psi \Rightarrow \psi$}
\doubleLine
\UnaryInfC{$\neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$}
\RightLabel{($\vee$L)}
\BinaryInfC{$\neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$}
\RightLabel{($\to$R)}
\UnaryInfC{$\Rightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi \to \neg(\varphi \wedge \psi).$}
\end{prooftree}
$$

4. Kripke モデル $M = (W, \leq, V)$ を $W = \{w_0, w_1, w_2\}, w_0 \leq w_1, w_0 \leq w_2, V(p) = \{w_1\}, V(q) = \{w_2\}$ で定める (図 5)．このとき $w_1 \not\models p \wedge q, w_2 \not\models p \wedge q$ だから $w_0 \models \neg(p \wedge q)$ である．一方で $w_1 \models p$ より $w_0 \not\models \neg p$ で，$w_2 \models q$ より $w_0 \not\models \neg q$ だから $w_0 \not\models \neg p \vee \neg q$ となる．よって $w_0 \not\models \neg(p \wedge q) \to \neg p \vee \neg q$.

□

古典論理の定理であって直観主義論理で証明できないものは他にも一般化排中律 $p \vee (p \to q)$ や Peirce の法則 $((p \to q) \to p) \to p$，線形性の公理 $(p \to q) \vee (q \to p)$ などたくさんあるが，これらを確認するのは読者の演習問題として残しておく．

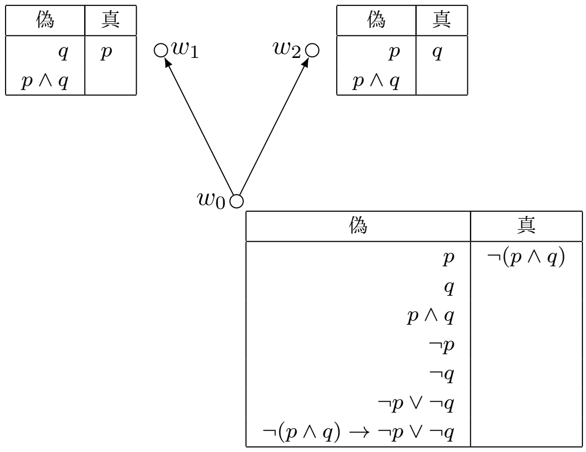

図 5　de Morgan の法則の反例モデル

参考文献

[1] 戸次大介, 数理論理学, 東京大学出版会, 2012.

[2] 萩谷昌己・西崎真也, 論理と計算のしくみ, 岩波書店, 2007.

[3] 鹿島亮 (2006), 直観主義論理入門 非古典論理の証明論的研究の一例, `http://www.is.titech.ac.jp/~kashima/manuscript/06SummerSchool.pdf`.

[4] 鹿島亮, 数理論理学, 朝倉書店, 2009.

[5] 古森雄一・小野寛晰, 現代数理論理学序説, 日本評論社, 2010.

[6] 小野寛晰, 情報科学における論理, 日本評論社, 1994.

[7] 照井一成 (2013), 直観主義論理への招待, `http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~terui/summer2013.pdf`.

変更履歴

2019/07/15　公開