Cantor の対関数の全単射性の証明

y.[*]

2016 年 11 月 12 日

本稿では $0 \in \mathbb{N}$ であるとする．

定義 (Cantor の対関数). 次の関数 $J \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を **Cantor の対関数** (Cantor pairing function) という．

$$J(m,n) := \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + n.$$

定理. J は全単射である．

証明. 逆写像を作ることはせずに，素直に全射性と単射性を示す．

- 全射性
  任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し，ある $m, n \in \mathbb{N}$ が存在して $J(m,n) = k$ となることを，k に関する数学的帰納法で示す．
  - $k = 0$ のとき，$m = n = 0$ とすればよい．
  - $k \in \mathbb{N}$ について $J(m,n) = k$ であるとする．
    * $m = 0$ のとき，$m' := n+1, n' := 0$ とおけば

$$\begin{aligned} J(m',n') &= \frac{(m'+n')(m'+n'+1)}{2} + n' \\ &= \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= J(m,n) + 1 \\ &= k + 1. \end{aligned}$$

    * $m > 0$ のとき，$m' := m-1, n' := n+1$ とおけば

$$\begin{aligned} J(m',n') &= \frac{(m'+n')(m'+n'+1)}{2} + n' \\ &= \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + n + 1 \\ &= J(m,n) + 1 \\ &= k + 1. \end{aligned}$$

[*] `http://iso.2022.jp/`

- 単射性

  $(m,n) \neq (m',n')$ なる $m,n,m',n' \in \mathbb{N}$ を任意に取る．

  – $m+n = m'+n'$ のとき，$n \neq n'$ だから

  $$J(m,n) - J(m',n') = n - n' \neq 0.$$

  – $m+n \neq m'+n'$ のとき，$m+n < m'+n'$ として一般性を失わない．このとき

  $$\begin{aligned} J(m,n) &= \left(\sum_{i=0}^{m+n} i\right) + n \\ &< \left(\sum_{i=0}^{m+n} i\right) + m + n + 1 \\ &= \sum_{i=0}^{m+n+1} i \\ &\leq \sum_{i=0}^{m'+n'} i \\ &\leq \sum_{i=0}^{m'+n'} i + n' \\ &= J(m',n'). \end{aligned}$$

□