量化記号消去 (QE) の判定法

y. (@waidotto)

http://iso.2022.jp/math/model-theory-seminar/QE/slide.pdf

2017 年 7 月 1 日

はじめに

QE とは次のようなものであった:

Definition

L 理論 T が量化記号消去 (quantifier elimination; QE) を持つとは，任意の L 論理式 $\varphi(\bar{x})$ に対して，ある量化記号のない L 論理式 $\rho(\bar{x})$ が存在して T のもとで同値，すなわち $T \models \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \rho(\bar{x}))$ となることである．

この発表の目的は，理論が QE を持つための判定条件を与えることである．

注: QE を持つための十分条件

任意の論理式は冠頭標準形 $Q_1 y_1 Q_2 y_2 \cdots Q_n y_n \rho(y_1, \ldots, y_n, \bar{x})$ (Q_i は $\forall$ または $\exists$ で，ρ は QF 論理式) に直すことができ，また $\forall y \equiv \neg \exists y \neg$ なので，任意の simple existential formula (QF 論理式に $\exists$ がひとつだけついたもの) が T のもとで QF 論理式と同値であることさえ言えれば，内側からひとつずつ量化記号を消去していくことができる．

目標

この発表では，次の定理を示すことを目標とする．

Theorem

理論 T に対し，次は同値:

a) T は QE を持つ．

b) T の任意のモデル $\mathcal{M}^1, \mathcal{M}^2$ とそれらの共通の部分構造 A に対し，$\mathcal{M}^1_A \equiv \mathcal{M}^2_A$. ($\mathcal{M}_A$ は $\mathcal{M}$ を $L(A) := L \cup A$ 構造と見なしたもの)

c) T の任意のモデル $\mathcal{M}^1, \mathcal{M}^2$ とそれらの共通の部分構造 A と任意の simple existential formula $\varphi(\bar{x})$ と $\bar{a} \in A$ に対し，$\mathcal{M}^1 \models \varphi(\bar{a}) \implies \mathcal{M}^2 \models \varphi(\bar{a})$.

準備 (完全性定理)

Fact (完全性定理)

L 理論 T と L 論理式 ψ に対し，以下は同値:

a) $T \vdash \psi$ (T から ψ が証明可能).

b) $T \models \psi$.

a)$\Longrightarrow$b) は健全性定理とも呼ばれ，「1 階述語論理の論理的公理は全て正しく，推論規則は正しさを保つ (仮定が正しければ結論も正しい)」ことを意味している.

b)$\Longrightarrow$a) は「1 階述語論理の証明体系はどんな証明もシミュレートできるだけの十分な証明能力を持っている」ことを意味している.

準備 (コンパクト性定理)

Theorem (コンパクト性定理)

L 理論 T に対し，以下は同値:

a) T はモデルを持つ.

b) 任意の有限部分集合 $T_0 \subseteq T$ はモデルを持つ.

Proof.

a)$\Longrightarrow$b) 明らか.

b)$\Longrightarrow$a) 対偶を示す. T がモデルを持たないとすると，$T \models \perp$ だから完全性定理より $T \vdash \perp$. この証明で使われる仮定は有限個だから，それらを集めて T_0 とおけば $T_0 \vdash \perp$ ゆえ $T_0 \models \perp$ なので T_0 はモデルを持たない. □

上の定理は「$T \models \perp$ ならば，ある有限部分集合 $T_0 \subseteq T$ が存在して $T_0 \models \perp$」と言い換えられる.

Separation Lemma (1/3)

Lemma (Separation Lemma)

T_1, T_2 を L 理論とし，$\mathcal{H}$ を，$\wedge, \vee$ で閉じていて $\top, \bot$ を含むような文の集合とする．このとき，以下は同値:

a) ある文 $\varphi \in \mathcal{H}$ が存在して T_1 を T_2 から分離 (separate) する i.e. $T_1 \models \varphi, T_2 \models \neg\varphi$.

b) T_1 の任意のモデル $\mathcal{A}_1$ と T_2 の任意のモデル $\mathcal{A}_2$ はある文 $\varphi \in \mathcal{H}$ によって分離される i.e. $\mathcal{A}_1 \models \varphi, \mathcal{A}_2 \models \neg\varphi$.

特に，L に定数記号 $\bar{c}$ を追加し，$T_1 = T \cup \{\varphi(\bar{c})\}, T_2 = T \cup \{\neg\varphi(\bar{c})\}$, $\mathcal{H} = \{n$ 変数 QF 論理式 $\}$ のとき，b) は次のように言い換えられる．

b) の言い換え

任意の $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \models T$ に対し，「任意の QF 論理式 $\rho(\bar{x})$ に対して $\mathcal{A}_1 \models \rho(\bar{c}) \iff \mathcal{A}_2 \models \rho(\bar{c})$」ならば $\mathcal{A}_1 \models \varphi(\bar{c}) \implies \mathcal{A}_2 \models \varphi(\bar{c})$.

以下，位相空間の命題に帰着することでこの補題を証明する．

Separation Lemma (2/3)

Proposition

X を位相空間，Y_1, Y_2 をその (準) コンパクト部分集合とし，$\mathcal{H}$ を開かつ閉集合からなる集合とする．このとき以下は同値:

a) $\mathcal{H}$ のある positive Boolean combination B ($\cap, \cup$ だけで作れるもの) が存在して $Y_1 \subseteq B$ かつ $Y_2 \cap B = \emptyset$.

b) 任意の $y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2$ に対し，ある $H \in \mathcal{H}$ が存在して $y_1 \in H$ かつ $y_2 \notin H$.

Proof.

a)$\Longrightarrow$b) easy.

b)$\Longrightarrow$a) 各 $y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2$ に対して存在する H を $H(y_1, y_2)$ と書く．各 y_2 に対し $\{ H(y_1, y_2) \mid y_1 \in Y_1 \}$ は Y_1 の開被覆だから有限部分被覆 $\mathcal{U}_{y_2}$ が存在する．このとき $\{ (\bigcup \mathcal{U}_{y_2})^c \mid y_2 \in Y_2 \}$ は Y_2 の開被覆だから有限部分被覆 $(\bigcup \mathcal{U}_{y_2(1)})^c, \ldots, (\bigcup \mathcal{U}_{y_2(n)})^c$ が存在する．よって $B := \bigcap_{i=1}^{n} \bigcup \mathcal{U}_{y_2(n)}$ とおけばよい． □

Separation Lemma (3/3)

Proof of Separation Lemma.

$X =$ “L 構造全体”/初等同値 $= \{ \mathrm{Th}(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A}$ は L 構造 $\}$,
$Y_i = \{ \mathrm{Th}(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \models T_i \}$ $(i = 1, 2)$ とし，各 $\varphi \in \mathcal{H}$ に対し
$[\varphi] := \{ p \in X \mid \varphi \in p \}$ と定め，X の開基を $\{ [\varphi], [\neg\varphi] \mid \varphi \in \mathcal{H} \}$ とする．
このとき Y_i がコンパクトであることを示せば先の Proposition から Lemma が示される．

Y の任意の開被覆 $\{ [\varphi] \mid \varphi \in I \}$ をとると，$Y \subseteq \bigcup_{\varphi \in I} [\varphi]$ だから
$Y \cap \bigcap_{\varphi \in I} [\neg\varphi] = \emptyset$ である．これは「全ての $\neg\varphi$ を真にするような T のモデル (の初等ダイアグラム) は存在しない」，つまり $T \cup \{ \neg\varphi \mid \varphi \in I \} \models \bot$ を意味する．よってコンパクト性定理からある有限部分集合 $I_0 \subseteq I$ が存在して $T \cup \{ \neg\varphi \mid \varphi \in I_0 \} \models \bot$. したがって $Y \cap \bigcap_{\varphi \in I_0} [\neg\varphi] = \emptyset$ となり
$Y \subseteq \bigcup_{\varphi \in I_0} [\varphi]$. □

QE の判定法

Theorem (再掲)

理論 T に対し，次は同値:

a) T は QE を持つ.

b) T の任意のモデル $\mathcal{M}^1, \mathcal{M}^2$ とそれらの共通の部分構造 $\mathcal{A}$ に対し，$\mathcal{M}^1_A \equiv \mathcal{M}^2_A$. ($\mathcal{M}_A$ は $\mathcal{M}$ を $L \cup \{c_a \mid a \in A\}$ 構造と見なしたもの)

c) T の任意のモデル $\mathcal{M}^1, \mathcal{M}^2$ とそれらの共通の部分構造 $\mathcal{A}$ と任意の simple existential formula $\varphi(\bar{x})$ と $\bar{a} \in A$ に対し，$\mathcal{M}^1 \models \varphi(\bar{a}) \implies \mathcal{M}^2 \models \varphi(\bar{a})$.

QE の判定法 (証明 1/4)

Proof.

a)$\Longrightarrow$b) $\varphi(\bar{a})$ を $\mathcal{M}^1$ で成り立つ $L(A)$ 文とする．仮定より $\varphi(\bar{x})$ と T のもとで同値な QF 論理式 $\rho(\bar{x})$ がとれる．このとき

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^1 \models \varphi(\bar{a}) &\Longrightarrow \mathcal{M}^1 \models \rho(\bar{a}) \\ &\Longrightarrow \mathcal{A} \models \rho(\bar{a}) \\ &\Longrightarrow \mathcal{M}^2 \models \rho(\bar{a}) \\ &\Longrightarrow \mathcal{M}^2 \models \varphi(\bar{a}).\end{aligned}$$

b)$\Longrightarrow$c) 明らか.

(続く)

QE の判定法 (証明 2/4)

Proof.

c)⟹a) $\varphi(\bar{x})$ を simple existential formula とする．$\varphi(\bar{x})$ がある QF 論理式 $\rho(\bar{x})$ と T のもとで同値になることを示したい．

L に新しい定数記号 $\bar{c}$ を追加し，$\rho(\bar{c})$ によって $T \cup \{\varphi(\bar{c})\}$ が $T \cup \{\neg\varphi(\bar{c})\}$ から分離できることが言えれば，$T \cup \{\varphi(\bar{c})\} \models \rho(\bar{c})$ より $T \models \varphi(\bar{c}) \to \rho(\bar{c})$ であり，また $T \cup \{\neg\varphi(\bar{c})\} \models \neg\rho(\bar{c})$ より $T \models \neg\varphi(\bar{c}) \to \neg\rho(\bar{c})$ であるから $T \models \forall\bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \rho(\bar{x}))$.

Separation Lemma の b) の言い換えを示す．つまり，任意の $\mathcal{M}^1, \mathcal{M}^2 \models T$ とその元 $\bar{a}^1 \in M^1, \bar{a}^2 \in M^2$ に対し，$(\mathcal{M}^1, \bar{a}^1), (\mathcal{M}^2, \bar{a}^2)$ においてはすべての QF $L(\bar{c})$ 文の真偽が一致するとして

$$\mathcal{M}^1 \models \varphi(\bar{a}^1) \implies \mathcal{M}^2 \models \varphi(\bar{a}^2) \tag{1}$$

を示せばよい．(続く)

QE の判定法 (証明 3/4)

Proof.

$\bar{a}^i$ で生成される部分構造 (定数を含み，関数で閉じている最小の部分構造) $\mathcal{A}^i = \langle \bar{a}^i \rangle^{\mathcal{M}^i}$ を考える．ここでもし，ある同型写像 $f\colon \mathcal{A}^1 \to \mathcal{A}^2$ で $f(\bar{a}^1) = \bar{a}^2$ なるものが存在すれば，$\mathcal{A}^1 = \mathcal{A}^2, \bar{a}^1 = \bar{a}^2$ としてよいので仮定 c) より (1) が成り立ち，証明が終わる．

$\mathcal{A}^1$ の任意の元は L 項 $t(\bar{x})$ について $t^{\mathcal{M}^1}[\bar{a}^1]$ という形をしているので，f は

$$f(t^{\mathcal{M}^1}[\bar{a}^1]) = t^{\mathcal{M}^2}[\bar{a}^2]$$

を満たさなければならない．そこで f を上の等式で定義し，well-defined な全単射となることを示せばよい． (続く)

QE の判定法 (証明 4/4)

Proof.

$$s^{\mathcal{M}^1}[\bar{a}^1] = t^{\mathcal{M}^1}[\bar{a}^1]$$

と仮定すると，$(\mathcal{M}^1, \bar{a}^1) \models s(\bar{c}) = t(\bar{c})$ だから，QF $L(\bar{c})$ 文の真偽が一致するという仮定から $(\mathcal{M}^2, \bar{a}^2) \models s(\bar{c}) = t(\bar{c})$ であり，したがって

$$s^{\mathcal{M}^2}[\bar{a}^2] = t^{\mathcal{M}^2}[\bar{a}^2]$$

だから f は well-defined であり，この証明を逆にたどれば単射性がわかる．また，$t^{\mathcal{M}^2}[\bar{a}^2] \in A^2$ に対しては $t^{\mathcal{M}^1}[\bar{a}^1]$ をとればよいので f は全射．

あとは f が関係記号の解釈と可換なことを示せばよいが，上と同様にして

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^1 \models R[t_1^{\mathcal{M}^1}[\bar{a}^1], \dots, t_m^{\mathcal{M}^1}[\bar{a}^1]] &\iff (\mathcal{M}^1, \bar{a}^1) \models R(t_1(\bar{c}), \dots, t_m(\bar{c})) \\
&\iff (\mathcal{M}^2, \bar{a}^2) \models R(t_1(\bar{c}), \dots, t_m(\bar{c})) \\
&\iff \mathcal{M}^2 \models R[t_1^{\mathcal{M}^2}[\bar{a}^2], \dots, t_m^{\mathcal{M}^2}[\bar{a}^2]]. \square
\end{aligned}$$

簡単な例

$L = \{<\}$ とする．

Theorem

端点のない稠密線形順序集合の理論 DLO $= \mathrm{Th}(\mathbb{Q})$ は QE を持つ．

Proof.

任意に $O_1, O_2 \models$ DLO とその共通の部分集合 A と simple existential formula $\exists y \rho(y, x_1, \ldots, x_n)$ と $a_1, \ldots, a_n \in A$ をとり，
$O_1 \models \exists y \rho(y, a_1, \ldots, a_n)$ であるとする．このとき，$O_1 \models \rho(b_1, a_1, \ldots, a_n)$ となる $b_1 \in O_1$ が存在するから，$a_i \mapsto a_i$ を順序保存写像
$f\colon \{a_1, \ldots, a_n, b_1\} \to O_2$ に拡張すれば $O_2 \models \rho(f(b_1), a_1, \ldots, a_n)$ ゆえ
$O_2 \models \exists y \rho(y, a_1, \ldots, a_n)$. よって DLO は QE を持つ． □

参考文献

K. Tent, M. Ziegler, *A Course in Model Theory*, Cambridge University Press, 2012.

この発表で紹介した判定法は Theorem 3.2.5 にあたる.