

アティマク演習問題解答

y.*

2017年6月18日

最終更新日: 2017年6月18日

概要

Atiyah-MacDonald「可換代数入門」[1]の演習問題の解答を自分用にまとめたものです。[2]を大いに参考にしました。

記号

- 環 A の単元全体を A^\times で表す。
- 環 A の冪零元根基を \mathfrak{N} , Jacobson 根基を \mathfrak{R} で表す。環を明示するときは \mathfrak{N}_A などと書く。
- 環 A とそのイデアル I に対し, 商環 A/I における $x \in A$ の同値類 $x + I$ を \bar{x} で表す。
- イデアル \mathfrak{a} の根基 $r(\mathfrak{a})$ を $\sqrt{\mathfrak{a}}$ で表す。
- 集合 X と Y の差集合 $X - Y$ を $X \setminus Y$ で表す。
- 位相空間 X と Y が位相同型であることを $X \approx Y$ で表す。

目次

1	環とイデアル	2
2	加群	12
3	商環と商加群	12
4	準素分解	12
5	整従属と付値	12
6	連鎖条件	12
7	ネーター環	12
8	アルティン環	12

* <http://iso.2022.jp/>

9	離散付値環とデデキント整域	12
10	完備化	12
11	次元論	12

1 環とイデアル

1. $x^n = 0$ であるとする. $y := -x$ とおくと $y^n = 0$ であるから $1 = 1 - y^n = (1 - y)(1 + y + \cdots + y^{n-1})$ より $1 + x = 1 - y \in A^\times$. また $u \in A^\times$ に対し, $u^{-1}x$ も冪零元だから今示したことより $u + x = u(1 + u^{-1}x) \in A^\times$.
2. i) (\implies) f の逆元を $g = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ とする. $fg = 1$ の 0 次の項を比較して $a_0b_0 = 1$ より $a_0, b_0 \in A^\times$. $r = 0, \dots, m$ に対し $a_n^{r+1}b_{m-r} = 0$ であることを r に関する帰納法で示す. $r = 0$ のとき, $fg = 1$ の最高次係数は $a_nb_m = 0$. $r - 1$ 以下で正しいと仮定する. $m + n - r$ 次の係数を見ると

$$\begin{aligned}
0 &= a_n^r \left(\sum_{i+j=m+n-r} a_i b_j \right) \\
&= \sum_{\substack{i+j=m+n-r \\ j \leq m-r}} a_n^r a_i b_j && (\text{帰納法の仮定より } j > m-r \implies a_n^r b_j = 0) \\
&= \sum_{k=0}^{m-r} a_n^r a_{m+n-r-k} b_k \\
&= a_n^r a_n b_{m-r} && (m+n-r-k \leq n \iff k \geq m-r) \\
&= a_n^{r+1} a_n b_{m-r}.
\end{aligned}$$

よって特に $r = m$ のとき $a_n^{m+1}b_0 = 0$ で, $b_0 \in A^\times$ より $a_n^{m+1} = 0$. よって a_n は A の冪零元であり, $a_n x^n$ は $A[x]$ の冪零元である. よって問題 1 より $f - a_n x^n = a_0 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$ は $A[x]$ の単元である. 以下同様にして a_{n-1}, \dots, a_1 は A の冪零元である.

(\Leftarrow) $a_0 \in A^\times$ より $a_0 \in A[x]^\times$ で, a_1, \dots, a_n が A の冪零元なのでその一次結合 $a_1 x + \cdots + a_n x^n$ は $A[x]$ の冪零元である. よって問題 1 から $f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in A[x]^\times$.

- ii) (\implies) f が冪零元だから問題 1 より $1 + f$ は単元であり, よって i) から a_1, \dots, a_n は A の冪零元である. $f^m = 0$ であるとするれば定数項は $a_0^m = 0$.

(\Leftarrow) a_0, \dots, a_n が A の冪零元なのでその一次結合 $f = a_0 + \cdots + a_n x^n$ は $A[x]$ の冪零元である.

- iii) (\implies) $g = b_0 + \cdots + b_m x^m$ を, $fg = 0$ となる $A[x]$ の 0 でない元のうち次数が最小のものとする. $fg = 0$ の最高次係数 $a_n b_m = 0$ より $\deg a_n g < m$ となるから m の最小性より $a_n g = 0$. よって $0 = fg = (a_0 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1})g$ の最高次係数 $a_{n-1} b_m = 0$ より $a_{n-1} g = 0$ となる. 以下同様にして $a_n g = \cdots = a_0 g = 0$ となるので 0 次の係数を見れば $b_0 f = 0$.

(\Leftarrow) 明らか.

- iv) $f \in A[x]$ の係数が生成するイデアルを $I(f)$ で表す.*1

*1 独語の der Inhalt のつもり. (9 章の問題では content の頭文字 $c(f)$ を用いている.)

(\implies) fg の k 次の係数は $\sum_{i+j=k} a_i b_j$ だから $I(fg) \subseteq I(f), I(fg) \subseteq I(g)$. よって $I(fg) = (1)$ ならば $I(f) \supseteq I(fg) = (1)$, 同様に $I(g) = (1)$.

(\impliedby) $I(f) = I(g) = (1), I(fg) \subsetneq (1)$ であるとする. $I(fg) \subseteq \mathfrak{m} \subsetneq (1)$ なる極大イデアル \mathfrak{m} をとる. $\mathfrak{m} \subsetneq I(f) = I(g)$ より $a_i, b_j \notin \mathfrak{m}$ となる a_i, b_j が存在するので, そのうち i, j が最小であるものを a_s, b_t とする. このとき fg の $s+t$ 次の係数 $c = \sum_{i+j=s+t} a_i b_j$ について, s, t の最小性から $a_s b_t$ 以外は $a_i b_j \in \mathfrak{m}$ であり, \mathfrak{m} は素イデアルでもあるから $a_s b_t \notin \mathfrak{m}$ であるので $c \notin \mathfrak{m} \supseteq I(fg) \ni c$ となり矛盾.

3. i) 「 $f \in A[x_1, \dots, x_r]$ が単元 $\iff f$ の定数項が A の単元で, それ以外の係数は A の冪零元である」ことを示す.

(\implies) 変数の個数 r に関する帰納法で示す. $r = 1$ のときは問題 2 で示した. r まで正しいと仮定する. $f = a_0 + a_1 x_{r+1} + \dots + a_n x_{r+1}^n \in A[x_1, \dots, x_r][x_{r+1}]$ とする. $r = 1$ の場合より f が単元なら a_0 が $A[x_1, \dots, x_r] \subseteq A[x_1, \dots, x_{r+1}]$ の単元かつ a_1, \dots, a_n が $A[x_1, \dots, x_r] \subseteq A[x_1, \dots, x_{r+1}]$ の冪零元である. よって帰納法の仮定から a_0 の定数項は A の単元かつ, それ以外の項は $A[x_1, \dots, x_r] \subseteq A[x_1, \dots, x_{r+1}]$ の冪零元である.

(\impliedby) 1 変数の場合と同様.

- ii) 「 f が $A[x_1, \dots, x_r]$ の冪零元 $\iff f$ のすべての係数が A の冪零元である」ことが, 1 変数の場合と全く同様にしてわかる.

- iii) (\implies) $f \in A[x_1, \dots, x_r]$ を零因子とする. $A[x_1, \dots, x_{r-k}]$ の元 $g \neq 0$ で $gf = 0$ となる g が存在することを k に関する帰納法で示す. $k = 1$ のときは $f \in A[x_1, \dots, x_{r-1}][x_r]$ と見ることによって $r = 1$ の場合に帰着される. k で正しいと仮定する. 帰納法の仮定から存在する $A[x_1, \dots, x_{r-k}]$ の元 $g \neq 0$ で $gf = 0$ なるもののうち, x_{r-k} に関する次数が最小のものをとる. 1 変数の場合と全く同様の議論により g の x_{r-k} に関する次数は 0 であることがわかり, $g \in A[x_1, \dots, x_{r-k-1}]$ を得る. $k = r$ とすれば $g \in A$.

(\impliedby) 明らか.

- iv) 問題 2 と同様に, $f \in A[x_1, \dots, x_r]$ の係数が生成するイデアルを $I(f)$ で表す. 「 $I(fg) = (1) \iff I(f) = I(g) = (1)$ 」を示す.

(\implies) 1 変数の場合と同様.

(\impliedby) $I(f) = I(g) = (1), I(fg) \subsetneq (1)$ であるとする. 極大イデアル $\mathfrak{m} \supset I(fg)$ をとる. $\mathfrak{m} \subsetneq I(f) = I(g)$ より $a_\lambda, b_\mu \notin \mathfrak{m}$ となる a_λ, b_μ が存在するので (λ, μ は multi-index), そのうち辞書式順序で最小のものを a_α, b_β とする. このとき fg の $\alpha + \beta$ 次の係数 $c = \sum_{\lambda+\mu=\alpha+\beta} a_\lambda b_\mu$ について, α, β の最小性から a_α, b_β 以外は $a_\lambda b_\mu \in \mathfrak{m}$ であり, \mathfrak{m} は素イデアルでもあるから $a_\alpha b_\beta \notin \mathfrak{m}$ であるので $c \notin \mathfrak{m} \supseteq I(fg) \ni c$ となり矛盾.

4. $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}$ を示す.

(\subseteq) 任意に $f = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in \mathfrak{R}$ をとると, 命題 1.9 より $1 + f \cdot x$ は $A[x]$ の単元だから問題 2-ii) により a_0, \dots, a_n は A の冪零元である. よって $f \in \mathfrak{R}$.

(\supseteq) 極大イデアルは素イデアルだから命題 1.8 より直ちにわかる.

5. i) (\implies) $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ によって $fg = 1$ であるとなれば $a_0 b_0 = 1$.

(\impliedby) $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ とし, $fg = 1$ となるように係数 b_n を数学的帰納法 (累積帰納法) によって定義する. $b_0 := a_0^{-1}$ とおく. fg の $n \geq 1$ 次の係数 $a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \dots + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n$ は 0 でなければならないから $b_n := -a_0^{-1}(a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \dots + a_1 b_{n-1})$ とするしかないが,

このように g を定めると $fg = 1$ となるのでよい.

- ii) $f^m = 0$ であるとするれば $a_0^m = 0$. よって $f - a_0 = x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$ も冪零元だから特に $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$ は冪零元である. したがって帰納的にすべての n について $a_n = 0$.
 しかし, 例えば $A := \mathbb{Q}[t_0, t_1, t_2, \dots] / \left((t_0^2, t_1^3, t_2^4, \dots) + \sum_{i \neq j} (t_i t_j) \right)$, $f := t_0 + t_1 x + t_2 x^2 + \dots \in A[[x]]$ とおくと f はすべての係数が冪零元だが, 任意の n について $f^n = t_0^n + t_1^n x^n + t_2^n x^{2n} + \dots$ であり $t_n^n \neq 0$ だから f は冪零元ではない.
- iii) 命題 1.9 を用いて示す.
 (⇒) 任意の $y \in A \subseteq A[[x]]$ に対して $1 - fy$ は $A[[x]]$ の単元だから, i) より $1 - a_0 y$ は A の単元である.
 (⇐) 任意の $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \in A[[x]]$ に対し, $1 - a_0 b_0$ は A の単元であるから i) より $1 - fg$ も $A[[x]]$ の単元である.
- iv) $\mathfrak{m} + (x) = (1)$ であったとするとある $f \in \mathfrak{m}, g \in A[[x]]$ によって $f + g \cdot x = 1$ と書けるが, i) より f が単元となってしまう矛盾する. よって $x \in \mathfrak{m}$ だから $A + \mathfrak{m} = A[[x]]$ である. このとき第 2 同型定理から $A[[x]]/\mathfrak{m} \cong A/\mathfrak{m}^c$ なので左辺が体なら右辺も体である. この同型は $\overline{f(x)} \mapsto \overline{f(0)}$ で与えられるから, 任意の $f(x) \in A[[x]]$ に対して $f(x) \in \mathfrak{m} \iff f(0) \in \mathfrak{m}^c$ となり, よって $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^c + (x)$.
- v) $A[[x]] \twoheadrightarrow A[[x]]/(x) \cong A$ によって素イデアル $\mathfrak{p} \subseteq A$ を引き戻した素イデアル $\mathfrak{p} + (x) \subseteq A[[x]]$ の縮約は再び \mathfrak{p} となる.
6. $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{R}$ は問題 4 で既に示した. 任意に $x \notin \mathfrak{N}$ をとると, $(x) \not\subseteq \mathfrak{N}$ だから仮定よりある $a \in A$ が存在して ax は冪零元となる. このとき $(1 - ax)ax = 0$ となるから $1 - ax$ は非単元で, よって命題 1.9 から $x \notin \mathfrak{R}$.
7. $\mathfrak{p} \subseteq A$ を素イデアルとし, 任意に $x \notin \mathfrak{p}$ をとる. 仮定よりある $n > 1$ が存在して $x^n = x$ となるから $x(x^{n-1} - 1) = 0 \in \mathfrak{p}$ となる. 今 $x \notin \mathfrak{p}$ だから $x^{n-1} - 1 \in \mathfrak{p}$ であり, したがって \bar{x} は A/\mathfrak{p} における単元だから A/\mathfrak{p} は体である.
8. A の素イデアル全体の集合を Σ とおく. 定理 1.3 より $A \neq 0$ は極大イデアルをもつので $\Sigma \neq \emptyset$. Σ が包含関係の逆順序に関して帰納的順序集合であることを言えば十分である. 任意に全順序部分集合 $\{\mathfrak{p}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \Sigma$ をとる. $\mathfrak{p} := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{p}_\lambda$ は明らかにイデアルであり, $x, y \notin \mathfrak{p}$ とするとある $\lambda, \mu \in \Lambda$ が存在して $x \notin \mathfrak{p}_\lambda, y \notin \mathfrak{p}_\mu$ となる. よって $xy \notin \min\{\mathfrak{p}_\lambda, \mathfrak{p}_\mu\} \supseteq \mathfrak{p}$ となるから \mathfrak{p} は素イデアルである.
9. (⇒) 命題 1.14 より $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}} \mathfrak{p}$.
 (⇐) $\mathfrak{a} = \bigcap_{\lambda} \mathfrak{p}_\lambda$ だとすると $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\bigcap_{\lambda} \mathfrak{p}_\lambda} = \bigcap_{\lambda} \sqrt{\mathfrak{p}_\lambda} = \bigcap_{\lambda} \mathfrak{p}_\lambda = \mathfrak{a}$. *2
10. i) ⇒ iii) 唯一つの素イデアルは極大イデアルであり, それは命題 1.8 から \mathfrak{N} である.
 iii) ⇒ ii) 任意の $x \notin \mathfrak{N}$ は A/\mathfrak{N} において単元だからある $y \in A$ が存在して $xy - 1$ は冪零元である. したがって問題 1 より $xy = 1 + (xy - 1)$ は A の単元だから x もそうである.
 ii) ⇒ i) 非単元の全体が \mathfrak{N} となり, これは極大ゆえ唯一の素イデアルである.
11. i) $2x = (1 + (-1)^2)x = (1 - 1)x = 0$.
 ii) 任意の $x \in A$ について $x^2 = x$ より $x(x - 1) = 0 \in \mathfrak{p}$ だから $x \in \mathfrak{p}$ または $x - 1 \in \mathfrak{p}$ で, これは A/\mathfrak{p} において $\bar{x} = 0$ または $\bar{x} = 1$ であることを意味する.

*2 2 つ目の等号は一般のイデアルに対しては $\sqrt{\bigcap_{\lambda} \mathfrak{a}_\lambda} \subseteq \bigcap_{\lambda} \sqrt{\mathfrak{a}_\lambda}$ の方向しか成り立たないことに注意せよ. (問題の証明にはこの方向だけあれば十分である.) 例えば $A = \mathbb{Z}, \mathfrak{a}_n = 2^n \mathbb{Z}$ とおけば反例になる.

- iii) 生成元が2個の場合にのみ示せば十分である. イデアル $(x, y) \subseteq A$ に対し, $(x, y) = (x + xy + y)$ を示す.*³ $x + xy + y \in (x, y)$ は明らか. $x(x + xy + y) = x + xy + xy = x$ より $x \in (x + xy + y)$ となる. y についても同様である.
12. 仮に x を 0 でも 1 でもない冪等元とすると, $x(x - 1) = 0$ より x と $x - 1$ はともに非単元となるから唯一の極大イデアル \mathfrak{m} に含まれるがこれは $1 \notin \mathfrak{m}$ に矛盾.
13. 仮に $1 \in \mathfrak{a}$ であったとすると, ある有限個の $f_1, \dots, f_n \in \mathfrak{a}$ と $g_1, \dots, g_n \in A$ が存在して $g_1 f_1 + \dots + g_n f_n = 1$ となる. x_{f_i} を x_i と書くことにすると, このとき x_1, \dots, x_n 以外の変数には 1 を代入することで g_1, \dots, g_n には x_1, \dots, x_n 以外の変数は現れないとしてよい. $f_1 \dots f_n$ の K 上の分解体 L をとり, f_i の L における根の 1 つを α_i とする. ここで代入写像 $K[x_1, \dots, x_n] \rightarrow L; x_i \mapsto \alpha_i$ の核 \mathfrak{b} を考えると, $g_1 f_1 + \dots + g_n f_n \in \mathfrak{b} \not\ni 1$ となり矛盾.*⁴
14. まず $(0) \in \Sigma$ ゆえ $\Sigma \neq \emptyset$ である. Σ が帰納的順序集合であることは明らか. \mathfrak{p} を Σ の極大元の 1 つとする. $x, y \notin \mathfrak{p}$ とすると, $\mathfrak{p} + (x)$ と $\mathfrak{p} + (y)$ は零因子でない元を含むから, ある $p, q \in \mathfrak{p}$ と $a, b \in A$ が存在して $p + ax$ と $q + by$ は零因子ではない. よってその積 $(p + ax)(q + by) = (pq + pby + qax) + abxy \in \mathfrak{p} + (xy)$ も零因子ではないので $xy \notin \mathfrak{p}$. また同様にして任意の零因子 $x \in A$ に対し $(x) \in \Sigma$ を含む極大元の存在が言えるので, 零因子全体は素イデアルの和集合である.
15. i) $E \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$ だから $V(E) \supseteq V(\mathfrak{a}) \supseteq V(\sqrt{\mathfrak{a}})$ は明らか. $\mathfrak{p} \supseteq E$ であったとすると $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}$ であり, 任意に $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ をとるとある $n \geq 1$ が存在して $f^n \in \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ となる. \mathfrak{p} は素イデアルだから $f \in \mathfrak{p}$ であり, よって $\mathfrak{p} \supseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$ だから $V(E) \subseteq V(\sqrt{\mathfrak{a}})$.
- ii) 任意のイデアルは 0 を含むから $V(0) = X$ であり, 素イデアルは (1) ではないから $V(1) = \emptyset$.
- iii) $\mathfrak{p} \in V(\bigcup_{i \in I} E_i) \iff \bigcup_{i \in I} E_i \subseteq \mathfrak{p} \iff$ すべての $i \in I$ に対し $E_i \subseteq \mathfrak{p} \iff \mathfrak{p} \in \bigcap_{i \in I} V(E_i)$.
- iv) $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ だから $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ は明らか. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \not\subseteq \mathfrak{p}$ とすると, ある $x \in \mathfrak{a}, y \in \mathfrak{b}$ が存在して $x, y \notin \mathfrak{p}$ となるから $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \ni xy \notin \mathfrak{p}$ ゆえ $V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.
16. • $\text{Spec}(\mathbb{Z}) = \{(0)\} \cup \{(p) : p \text{ は素数}\}$. (図 1)
 (0) は任意の非空開集合に含まれるので, “すべての点の近くにある” と思うことができる.
- $\text{Spec}(\mathbb{R}) = \{(0)\}$.
- $\text{Spec}(\mathbb{C}[x]) = \{(0)\} \cup \{(x - a) : a \in \mathbb{C}\}$.
 $\mathbb{C}[x]$ は PID で, \mathbb{C} は代数閉体だから既約多項式は 1 次式のみである.
- $\text{Spec}(\mathbb{R}[x]) = \{(0)\} \cup \{(x - a) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(x^2 + bx + c) : b, c \in \mathbb{R}, b^2 - 4c < 0\}$.
 代数学の基本定理より $\mathbb{R}[x]$ の任意の元は高々 2 次の多項式の積に分解される. 複素共役の区別がないので, おおよそ $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z \geq 0\}$ に対応すると思うことができる.
- $\text{Spec}(\mathbb{Z}[x]) = \{(0)\} \cup \{(f) : f \text{ は既約原始多項式}\} \cup \{(p) : p \text{ は素数}\}$
 $\cup \{(p, f) : p \text{ は素数で } f \text{ は } \mathbb{F}_p \text{ 上既約な多項式}\}$. (図 2)
- 包含写像 $i: \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}[x]$ によって写像 $f: \text{Spec}(\mathbb{Z}[x]) \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z}); \mathfrak{p} \mapsto i^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}$ ができる. $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ の各点におけるファイバーに分解して考える: $\text{Spec}(\mathbb{Z}[x]) = f^{-1}((0)) \cup \bigcup_{p: \text{素数}} f^{-1}(p\mathbb{Z})$.
 まず $\mathfrak{p} \in f^{-1}((0)) \iff \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = \{0\}$ であるから, 積閉集合 $S := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ とおけば命題 3.11-iv) より $f^{-1}((0))$ の元は $\text{Spec}(S^{-1}\mathbb{Z}[x]) = \text{Spec}(\mathbb{Q}[x])$ の元に 1 対 1 に対応する. $\text{Spec}(\mathbb{Q}[x])$ の元は (0) または既約多項式 f で生成される単項イデアル $f\mathbb{Q}[x]$ であり, $f\mathbb{Q}[x]$ に対応する $\mathbb{Z}[x]$

*³ 例えば集合 X の冪集合 $\mathcal{P}(X)$ に加法・乗法をそれぞれ対称差・共通部分で定めると Boole 環になる. このとき $x \in \mathcal{P}(X)$ で生成される単項イデアルは x に包含される部分集合全体 $(x) = \mathcal{P}(x) \subseteq \mathcal{P}(X)$ であり, $x + xy + y = x \cup y$ である.

*⁴ この証明は永田 [3] を参考にした.

の素イデアルは f の係数の分母を払った原始多項式で生成されるイデアル $f\mathbb{Z}[x]$ である. 次に $\mathfrak{p} \in f^{-1}(p\mathbb{Z}) \iff \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z} \iff \mathfrak{p} \supseteq p\mathbb{Z}[x]$ であるから命題 1.1 より $f^{-1}(p\mathbb{Z})$ の元は $\text{Spec}(\mathbb{Z}[x]/p\mathbb{Z}[x]) \cong \text{Spec}(\mathbb{F}_p[x])$ の元と 1 対 1 に対応する. $\text{Spec}(\mathbb{F}_p[x])$ の元は (0) または \mathbb{F}_p 上で既約な多項式 f で生成される単項イデアル $f\mathbb{F}_p[x]$ であり, (0) には $p\mathbb{Z}[x] \in \text{Spec}(\mathbb{Z}[x])$ が対応し, $f\mathbb{F}_p[x]$ には $p\mathbb{Z}[x] + f\mathbb{Z}[x] \in \text{Spec}(\mathbb{Z}[x])$ が対応する.*5

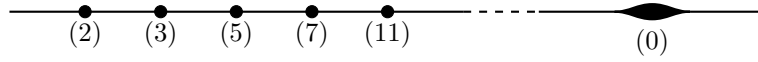


図1 Spec(Z)

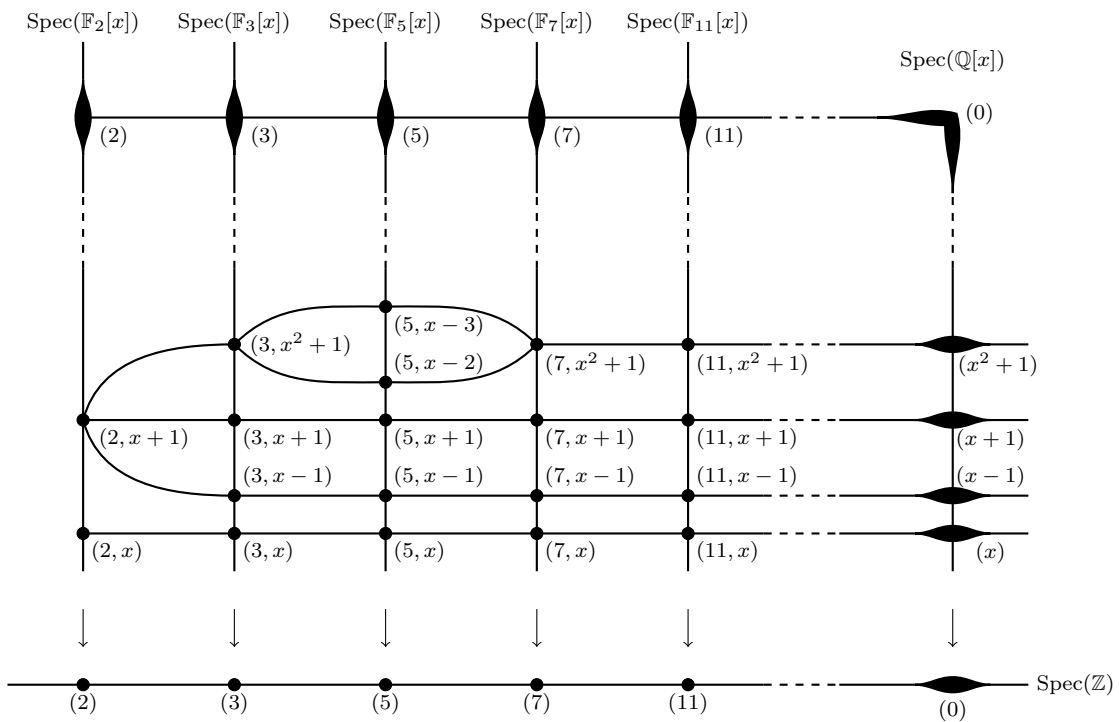


図2 Spec(Z[x]) ([5] を参考に作成)

17. 任意の開集合はある $E \subseteq A$ により $X \setminus V(E)$ と書くことができ, $X \setminus V(E) = X \setminus \bigcap_{f \in E} V(f) = \bigcup_{f \in E} (X \setminus V(f)) = \bigcup_{f \in E} X_f$ であるから $(X_f)_{f \in A}$ は開基である.
- i) $X_f \cap X_g = (X \setminus V(f)) \cap (X \setminus V(g)) = X \setminus (V(f) \cup V(g)) = X \setminus V(fg) = X_{fg}$ (問題 15-iv).
 - ii) $X_f = \emptyset \iff V(f) = X \iff$ 任意の $\mathfrak{p} \in X$ に対し $f \in \mathfrak{p} \iff f \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in X} \mathfrak{p} = \mathfrak{N}$ (命題 1.8).
 - iii) $X_f = X \iff V(f) = \emptyset \iff$ 任意の $\mathfrak{p} \in X$ に対し $f \notin \mathfrak{p} \iff f \in A^\times$ (系 1.5).
 - iv) $V(f) = V(g) \iff \bigcap_{\mathfrak{p} \ni f} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{p} \ni g} \mathfrak{p} \iff \sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$ (命題 1.14).
 - v) 必要なら開被覆を細分することで, 開被覆は開基からなると仮定してよい. $\bigcup_{f \in E} X_f = X$ であるとする. 補集合をとると $V(E) = \emptyset$ であるから E が生成するイデアルは 1 を含む. よってある

*5 この議論は Liu [4, Example 1.8, page 28] を参考にした.

$f_1, \dots, f_n \in E$ と $g_1, \dots, g_n \in A$ が存在して $g_1 f_1 + \dots + g_n f_n = 1$ となるから $(f_1, \dots, f_n) = (1)$ となり, 有限部分被覆 $X_{f_1} \cup \dots \cup X_{f_n} = X$ を得る.*6

vi) $X_f \subseteq \bigcup_{g \in E} X_g$ であるとする. 補集合をとると $V(f) \supseteq V(E)$ だから, E が生成するイデアルを \mathfrak{a} とおくと命題 1.14 より $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ である. よってある $g_1, \dots, g_n \in E, h_1, \dots, h_n \in A, m \geq 1$ が存在して $f^m = h_1 g_1 + \dots + h_n g_n$ となるから $f \in \sqrt{(g_1, \dots, g_n)}$ である. よって $V(f) \supseteq V((g_1, \dots, g_n))$ より有限部分被覆 $X_f = X_{g_1} \cup \dots \cup X_{g_n}$ を得る.*7

vii) 問題文の正しい訳は「 X の開集合が準コンパクトであるための必要十分条件は, X_f の形の有限個の和集合になることである。」である.*8 (v) より X は準コンパクトだから X は常に X_f の形の有限個の和集合になる.) 準コンパクトならば開基 X_f の有限和で書けることは明らか. 逆は一般に準コンパクト集合の有限和も準コンパクトになることからわかる.

18. i) ii) より, x が閉点 $\iff \overline{\{x\}} = \{x\} = V(\mathfrak{p}_x) \iff \mathfrak{p}_x$ は極大イデアル.

ii) $\overline{\{x\}}$ は閉集合だからある $E \subseteq A$ によって $\overline{\{x\}} = V(E)$ と表され, $x \in V(E)$ より $E \subseteq \mathfrak{p}_x$ であり, また $V(E)$ の最小性から E はこのようなものの中で最大であればよいので $E = \mathfrak{p}_x$.

iii) ii) より $y \in \overline{\{x\}} \iff y \in V(\mathfrak{p}_x) \iff \mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y$.

iv) $x \neq y$ とする. $\mathfrak{p}_x \not\subseteq \mathfrak{p}_y$ として一般性を失わない. $\mathfrak{p}_x \ni f \notin \mathfrak{p}_y$ なる f をとれば $x \in V(f) \not\subseteq \mathfrak{p}_y$.

19. $A = 0$ のときは明らかだから $A \neq 0$ としてよい. $\text{Spec}(A)$ が既約であることは $\text{Spec}(A)$ の任意の 2 つの空でない開基が交わりを持つことと同値であり, これは問題 17-i) より $X_f, X_g \neq \emptyset$ ならば $X_{fg} \neq \emptyset$ であることと同値である. さらにこれは問題 17-ii) より $f, g \notin \mathfrak{M}$ ならば $fg \notin \mathfrak{M}$ であることと同値である.

20. i) $U \cap \overline{Y}, V \cap \overline{Y} \neq \emptyset$ なる X の開集合 U, V を任意にとる. このとき, 仮に $U \cap Y = \emptyset$ であるとすれば $Y \subseteq X \setminus U$ より $\overline{Y} \subseteq X \setminus U$ となるから $U \cap \overline{Y} = \emptyset$ となって矛盾する. よって $U \cap Y \neq \emptyset$ であり, 同様に $V \cap Y \neq \emptyset$ である. 仮定より Y は既約だから $\emptyset \neq U \cap V \cap Y \subseteq U \cap V \cap \overline{Y}$.

ii) $Y \subseteq X$ を既約部分空間としたとき, Y を含む X の既約部分集合全体 Σ が帰納的順序集合であることを示せば十分である. まず $Y \in \Sigma$ より $\Sigma \neq \emptyset$ である. 任意の全順序部分集合 $\{Z_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \Sigma$ に対して, 仮に $Z := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda$ が既約でなかったとすると X のある開集合 U, V が存在して $U \cap Z, V \cap Z \neq \emptyset$ かつ $U \cap V \cap Z = \emptyset$ となる. このときある $\lambda, \mu \in \Lambda$ が存在して $U \cap Z_\lambda, V \cap Z_\mu \neq \emptyset$ だから $\tilde{Z} := \max\{Z_\lambda, Z_\mu\}$ とおけば $U \cap \tilde{Z}, V \cap \tilde{Z} \neq \emptyset$ かつ $U \cap V \cap \tilde{Z} \subseteq U \cap V \cap Z = \emptyset$.

iii) $Y \subseteq X$ を既約成分とすると i) より \overline{Y} も既約だから極大性より $\overline{Y} = Y$ となり Y は閉集合である. Hausdorff 空間の 2 点以上からなる部分集合は既約でないから, Hausdorff 空間の既約成分は 1 点集合である.

iv) \mathfrak{p} は極小ゆえ $V(\mathfrak{p})$ が極大であることは明らか. 既約であることを示す. X の開基 X_f, X_g で $X_f \cap V(\mathfrak{p}), X_g \cap V(\mathfrak{p}) \neq \emptyset$ なるものを任意にとる. ここで $X_f \cap V(\mathfrak{p}) = \{q \in X : f \notin q \supseteq \mathfrak{p}\}$ だから特に $f \notin \mathfrak{p}$ であり, 同様に $g \notin \mathfrak{p}$ である. \mathfrak{p} は素イデアルだから $fg \notin \mathfrak{p}$ であり, したがって $\mathfrak{p} \in X_{fg} \cap V(\mathfrak{p})$ だから問題 17-i) より $X_f \cap X_g \cap V(\mathfrak{p}) \neq \emptyset$.*9

21. i) $q \in \phi^{*-1}(X_f) \iff \phi^*(q) = \phi^{-1}(q) \in X_f \iff \phi^{-1}(q) \not\subseteq f \iff q \not\subseteq \phi(f) \iff q \in Y_{\phi(f)}$.

*6 邦訳 [1] では quasi-compact に擬コンパクトという訳語が当てられているが, 普通は quasi-compact は準コンパクトと訳す. 位相空間 X が擬コンパクト (pseudocompact) とは任意の連続関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が有界になることを言う.

*7 命題 3.11-iv) より $X_f \cong \text{Spec}(A_f)$ であることを用いると v) から直ちにわかる.

*8 原著では “An open subset of X is quasi-compact if and only if it is a finite union of sets X_f .” となっている.

*9 命題 1.1 より $V(\mathfrak{p}) \cong \text{Spec}(A/\mathfrak{p})$ だから問題 19 より既約であるということもできる.

- ii) $q \in \phi^{*-1}(V(\mathfrak{a})) \iff \phi^{-1}(q) \in V(\mathfrak{a}) \iff \phi^{-1}(q) \supseteq \mathfrak{a} \iff q \supseteq \phi(\mathfrak{a}) \iff q \supseteq \mathfrak{a}^e \iff q \in V(\mathfrak{a}^e)$.
- iii) まず, 一般に任意の $Z \subseteq X$ に対し $\overline{Z} = V(\bigcap_{\mathfrak{p} \in Z} \mathfrak{p})$ である. 実際, \overline{Z} は閉集合だからある $E \subseteq A$ によって $\overline{Z} = V(E)$ と表されるが, $Z \subseteq V(E)$ より任意の $\mathfrak{p} \in Z$ に対して $E \subseteq \mathfrak{p}$ でなければならないから $E \subseteq \bigcap_{\mathfrak{p} \in Z} \mathfrak{p}$ であり, 閉包の最小性から E はこのようなものの中で最大であればよいので $E = \bigcap_{\mathfrak{p} \in Z} \mathfrak{p}$ とすればよい. 以上より $\overline{\phi^*(V(\mathfrak{b}))} = V(\bigcap_{q \supseteq \mathfrak{b}} \phi^*(q)) = V(\phi^{-1}(\bigcap_{q \supseteq \mathfrak{b}} q)) = V(\phi^{-1}(\sqrt{\mathfrak{b}})) = V((\sqrt{\mathfrak{b}})^e) = V(\sqrt{\mathfrak{b}^e}) = V(\mathfrak{b}^e)$.
- iv) $B \cong A/\text{Ker}(\phi)$ だから命題 1.1 より $\phi^*: Y \rightarrow V(\text{Ker}(\phi))$ は全単射であり, また i) より連続である. さらに任意の閉集合 $V(E) \subseteq Y$ に対して, ϕ^{-1} は包含関係を保つから $\phi^*(V(E)) = V(\phi^{-1}(E))$ となり, したがって ϕ^* は閉写像ゆえ $\phi^{*-1}: V(\text{Ker}(\phi)) \rightarrow Y$ は連続である. 特に, ϕ を商写像 $A \rightarrow A/\mathfrak{N}$ とすれば $V(\text{Ker}(\phi)) = V(\mathfrak{N}) = \text{Spec}(A)$ だから $\phi^*: \text{Spec}(A/\mathfrak{N}) \rightarrow \text{Spec}(A)$ は同相写像である.*10
- v) まず iii) と同様の議論により $\overline{\phi^*(Y)} = V(\bigcap_{\mathfrak{p} \in \phi^*(Y)} \mathfrak{p})$ であり, $V(\bigcap_{\mathfrak{p} \in \phi^*(Y)} \mathfrak{p}) = V(\bigcap_{q \in Y} \phi^{-1}(q)) = V(\phi^{-1}(\bigcap_{q \in Y} q)) = V(\phi^{-1}(\mathfrak{N}_B))$ である. 問題 9 や $\text{Ker}(\phi) \subseteq \phi^{-1}(\mathfrak{N}_B)$ などと合わせると $\overline{\phi^*(Y)} = X \iff V(\phi^{-1}(\mathfrak{N}_B)) = V(\mathfrak{N}_A) \iff \sqrt{\phi^{-1}(\mathfrak{N}_B)} = \sqrt{\mathfrak{N}_A} \iff \phi^{-1}(\mathfrak{N}_B) = \mathfrak{N}_A \iff \text{Ker}(\phi) \subseteq \mathfrak{N}_A$.
- vi) 任意の $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(C)$ に対し $(\psi \circ \phi)^{-1}(\mathfrak{p}) = \phi^{-1}(\psi^{-1}(\mathfrak{p}))$ であることより明らか.*11
- vii) 仮定より $\text{Spec}(A) = \{(0), \mathfrak{p}\}$ であり, \mathfrak{p} が極大イデアルであることより B は体の直積なので $\text{Spec}(B) = \{A/\mathfrak{p} \times (0), (0) \times K\}$ である. このとき $\phi^{-1}(A/\mathfrak{p} \times (0)) = (0), \phi^{-1}((0) \times K) = \mathfrak{p}$ より ϕ^* は全単射である. ここで問題 19 より $\text{Spec}(A)$ は既約だから特に連結であるが, 一方問題 22 より $\text{Spec}(B)$ は連結ではない. したがって $\text{Spec}(A)$ と $\text{Spec}(B)$ は位相同型ではない.*12
22. 射影 $\pi_k: A \rightarrow A_k$ により写像 $\pi_k^*: \text{Spec}(A_k) \rightarrow \text{Spec}(A)$ が誘導され, 問題 21-iv) より π_k^* は $\text{Spec}(A_k)$ から $\text{Spec}(A)$ の閉部分集合 $V(\text{Ker}(\pi_k)) = V(A_1 \times \cdots \times A_{k-1} \times (0) \times A_{k+1} \times \cdots \times A_n)$ への位相同型写像であり, $k \neq l$ ならば $V(\text{Ker}(\pi_k))$ と $V(\text{Ker}(\pi_l))$ は交わりを持たない. ここで A の素イデアルは素イデアル $\mathfrak{p} \subseteq A_k$ について $\pi_k^*(\mathfrak{p}) = A_1 \times \cdots \times A_{k-1} \times \mathfrak{p} \times A_{k+1} \times \cdots \times A_n$ という形のもので尽くされる. 実際, 直積因子に A_k 全体でないものが少なくとも 2 つ以上あったら素イデアルではない. したがって集合として全単射 $\prod_{i=1}^n \pi_i^*: \prod_{i=1}^n \text{Spec}(A_i) \rightarrow \text{Spec}(A)$ があるから各 $V(\text{Ker}(\pi_k))$ は $\text{Spec}(A)$ の開かつ閉集合, すなわち連結成分となり, したがって位相空間としても同型である.
- ii) \implies i) 今示した.
- i) \implies iii) X が非連結だから $V(\mathfrak{a}), V(\mathfrak{b}) \neq \emptyset$ なるイデアル $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$ によって $X = V(\mathfrak{a}) \sqcup V(\mathfrak{b})$ と書ける. $V(\mathfrak{a}), V(\mathfrak{b}) \neq \emptyset$ より $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \neq (1)$ である. $V(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cap V(\mathfrak{b}) = \emptyset$ より $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (1)$ だからある $f \in \mathfrak{a}, g \in \mathfrak{b}$ が存在して $f + g = 1$ となる. また $V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = X$ より $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{N}$ だからある $n > 0$ が存在して $(fg)^n = 0$ となる. したがって二項展開により $f^n + g^n - (f + g)^n = f^n + g^n - 1$ は冪零元だから問題 1 より $f^n + g^n$ は単元であり, よってある $h \in A$ が存在して $h(f^n + g^n) = 1$ となる. このとき $hf^n(1 - hf^n) = hf^n hg^n = 0$ より hf^n は冪

*10 邦訳 [1] では「特に, $\text{Spec}(A)$ と $\text{Spec}(A/\mathfrak{N})$ は自然な位相同型写像である」となっているが, 「特に, $\text{Spec}(A)$ と $\text{Spec}(A/\mathfrak{N})$ は自然に位相同型である」が正しいと思われる. 原著では “In particular, $\text{Spec}(A)$ and $\text{Spec}(A/\mathfrak{N})$ (中略) are naturally homeomorphic.” となっている.

11 i) と vi) より, 対応 $A \mapsto \text{Spec}(A), \phi \mapsto \phi^$ は可換環の圏 **CRing** から位相空間の圏 **Top** への変換手である.

*12 例えば素数 p に対し $A = \mathbb{Z}_{p\mathbb{Z}}$ とおけば問題で与えられた条件を満たす.

等元であり, 同様に hg^n も冪等元である. $hf^n \in \mathfrak{a} \neq (1)$ より $hf^n \neq 1$, また同様に $hg^n \neq 1$ であり, さらに $hf^n + hg^n = 1$ より hf^n と hg^n の少なくとも一方は 0 ではない. 以上より hf^n と hg^n の少なくとも一方は 0, 1 とは異なる冪等元である.

- iii) \implies ii) $x^2 = x$ とすると $(1-x)^2 = 1 - 2x + x = 1 - x$ だから $xA, (1-x)A$ はそれぞれ $x, 1-x$ を単位元とする環になる. 明らかに $A = xA + (1-x)A$ であり, また $x(1-x) = 0$ であるから任意の $a \in xA \cap (1-x)A$ に対し $(1-x)a = xa = 0$ より $a = 0$ となるので $xA \cap (1-x)A = (0)$ であり, よって $A \cong xA \times (1-x)A$.

以上より, 特に iii) でないなら i) でないので局所環のスペクトラムは連結である.

23. i) $f(1-f) = 0$ より任意の $\mathfrak{p} \in X$ に対し $f \notin \mathfrak{p} \iff 1-f \in \mathfrak{p}$ となるから $X_f = V(1-f)$.
 ii) $X_{f_1} \cup \dots \cup X_{f_n} = X \setminus V((f_1, \dots, f_n))$ だから問題 11-iii) により存在する (f_1, \dots, f_n) の生成元 f をとれば $X_{f_1} \cup \dots \cup X_{f_n} = X_f$.
 iii) ヒントの通り.
 iv) 問題 17-v) より X は準コンパクトである. 任意に異なる 2 元 $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in X$ をとると問題 11-ii) より極大イデアルだから $\mathfrak{p} + \mathfrak{q} = (1)$ である. よってある $f \in \mathfrak{p}, g \in \mathfrak{q}$ が存在して $f + g = 1$ となるから特に $f = 1 - g$ である. よって $\mathfrak{p} \in X_{1-f}, \mathfrak{q} \in X_f$.

24. $A(L)$ が $-a = a$ なる環となることを示す. $a'' = a, (a \wedge b)' = a' \vee b', (a \vee b)' = a' \wedge b'$ などは容易にわかる.*13

- $(a+b)+c = (((a \wedge b') \vee (a' \wedge b)) \wedge c') \vee (((a' \vee b) \wedge (a \vee b')) \wedge c) = (a \wedge b' \wedge c') \vee (a' \wedge b \wedge c') \vee (a' \wedge b' \wedge c) \vee (b \wedge a \wedge c)$ で, これは a, b, c に関して対称.
- $a+0 = (a \wedge 0') \vee (a' \wedge 0) = (a \wedge 1) \vee a = a \vee a = a$.
- $a+a = (a \wedge a') \vee (a' \wedge a) = 0 \vee 0 = 0$.
- $a+b = (a \wedge b') \vee (a' \wedge b) = (b \wedge a') \vee (b' \wedge a) = b+a$.
- $a(b+c) = a \wedge ((b \wedge c') \vee (b' \wedge c)) = (a \wedge b \wedge c') \vee (a \wedge b' \wedge c) = 0 \vee (a \wedge b \wedge c') \vee 0 \vee (a \wedge b' \wedge c) = (a \wedge b \wedge a') \vee (a \wedge b \wedge c') \vee (a \wedge a' \wedge c) \vee (a \wedge b' \wedge c) = (a \wedge b \wedge (a' \vee c')) \vee ((a' \vee b') \wedge a \wedge c) = ((a \wedge b) \wedge (a \wedge c')) \vee ((a \wedge b)' \wedge (a \wedge c)) = ab + ac$.
- $(ab)c = a(bc), ab = ba, 1a = a$ は明らか.

次に, \leq が順序になっていることを示す.

反射律 Boole 環だから $a = a^2$.

反対称律 $a = ab$ かつ $b = ab$ なら $a = ab = b$.

推移律 $a = ab$ かつ $b = bc$ なら $a = ab = a(bc) = (ab)c = ac$.

このように順序を定めると以下が成り立つ.

- $0 = 0a$ より 0 が最小元, $a = 1a$ より 1 が最大元である.
- $a \wedge b = ab$ である. 実際, $ab = ab \cdot a = ab \cdot b$ より $ab \leq a, ab \leq b$ であり, 任意に $c = ca, c = cb$ なる c をとると $c = cb = (ca)b$ より $c \leq ab$ となる.
- $a \vee b = a + b + ab$ である. 実際, $a = a + ab + ab = a(a + b + ab), b = b(a + b + ab)$ より $a, b \leq a + b + ab$ であり, 任意に $a = ac, b = bc$ なる c をとると $a + b + ab = (a + b + ab)c$ より $a + b + ab \leq c$ となる.

*13 集合 X の冪集合 $\mathcal{P}(X)$ を考えて $0, 1, \wedge, \vee, a'$ をそれぞれ $\emptyset, X, \cap, \cup, X \setminus a$ に読み替え, Venn 図を描けばすべての計算は直感的にほとんど明らかである.

• a の補元は $1 - a$ によって与えられる.*¹⁴ 実際, $a \wedge (1 - a) = a(1 - a) = 0, a \vee (1 - a) = a + 1 - a + a(1 - a) = 1$.

• \wedge, \vee は分配的である. 実際, $a \wedge (b \vee c) = a(b + c + bc) = ab + ac + abac = (a \wedge b) \vee (a \wedge c), a \vee (b \wedge c) = a + bc + abc = (a + ab + ab) + (ab + bc + abc) + (ab + abc + abc) = (a + b + ab)(a + c + ac) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

以上より可補分配束, すなわち Boole 束になることがわかる.*¹⁵

25. 与えられた Boole 束 L に対し, 問題 24 の通りに $A(L)$ を作る. $\text{Spec}(A(L))$ の開かつ閉集合の全体を S とおくと, 問題 23-iii) より $S = \{X_a : a \in A(L)\}$ である. よって写像 $\varphi: L \rightarrow S; a \mapsto X_a$ は全単射で, $\varphi(a \wedge b) = X_{ab} = X_a \cap X_b$ であり, また問題 23-i) と同様にして $\varphi(a \vee b) = \varphi((a' \wedge b)') = X_{1 - (1 - a)(1 - b)} = X \setminus (X \setminus X_a \cap X \setminus X_b) = X_a \cup X_b$ となるから束同型写像である.

26. 問題文の最初の方は「 A の極大イデアル全体の集合に誘導位相を入れた $\text{Spec}(A)$ の部分空間を A の極大スペクトラムと呼び, $\text{Max}(A)$ で表す. 極大スペクトラムは任意の可換環に対しては $\text{Spec}(A)$ のような良い関手的性質を持たない。」などと訳すのが良さそうである.*¹⁶

$\mu(U_f) = \tilde{U}_f$ を示す. $\mu(U_f) = \{\mathfrak{m}_x : f(x) \neq 0\}$ である.

(\subseteq) 明らか.

(\supseteq) i) と同様にして $V(\mathfrak{m}) \neq \emptyset$ より元 $x \in V(\mathfrak{m})$ をとると $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$ である. $f(x) = 0$ だとすると $f \in \mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}$ となってしまうから $f(x) \neq 0$.

次に U_f, \tilde{U}_f たちがそれぞれ X, \tilde{X} の開基となることを示す. 任意の空でない開集合 $U \subseteq X$ と点 $x \in U$ に対し, Urysohn の補題より $X \setminus U$ 上で $0, x$ で 1 をとる連続関数 f が存在するから $x \in U_f \subseteq U$ となる. \tilde{U}_f が開基であることは問題 17 と相対位相の定義より明らか. 以上より μ, μ^{-1} はともに開写像だから位相同型写像である.

27. μ の全射性を示す. 任意に $\mathfrak{m} \in \tilde{X}$ をとると, 系 7.10 より $P(X)/\mathfrak{m} \cong k$ である. このとき ξ_i の k における像を x_i とすれば $\mathfrak{m} = (\xi_1 - x_1, \dots, \xi_n - x_n) = \mathfrak{m}_{(x_1, \dots, x_n)}$.

28. $P(X) = k[t_1, \dots, t_n]/I(X), P(Y) = k[s_1, \dots, s_m]/I(Y)$ とする. X から Y への正則写像全体を $\text{Hom}(X, Y)$ で表し, $P(Y)$ から $P(X)$ への k 代数準同型全体を $\text{Hom}(P(Y), P(X))$ で表す. 問題文の対応 $\phi \mapsto (\eta \mapsto \eta \circ \phi)$ を $\alpha: \text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(P(Y), P(X))$ とする. 逆写像 $\beta: \text{Hom}(P(Y), P(X)) \rightarrow \text{Hom}(X, Y)$ を次のように作る. k 代数準同型 $h: P(Y) \rightarrow P(X)$ に対し, $h(\bar{s}_i) \in P(X)$ の代表元の 1 つを $\xi_i(t_1, \dots, t_n) \in k[t_1, \dots, t_n]$ とおき, $\beta(h) := (\xi_1, \dots, \xi_m)$ と定める.*¹⁷

(α の well-definedness) ϕ の 2 つの代表元 $F = (f_1, \dots, f_m), F' = (f'_1, \dots, f'_m)$ ($f_i, f'_i \in k[t_1, \dots, t_n]$) をとると, 任意の $x \in X$ に対し $F(x) = F'(x) \in Y$ である. η の 2 つの代表元 $g, g' \in k[s_1, \dots, s_m]$ をとると, $g - g' \in I(Y)$ すなわち任意の $y \in Y$ に対して $g(y) - g'(y) = 0$ である. このとき, まず任意に $x \in X$ をとると $F(x) \in Y$ だから, $g - g' \in I(Y)$ より $g(F(x)) - g'(F(x)) = 0$ なので $g(F) - g'(F) \in I(X)$ である. また, 任意の $x \in X$ に対して $F(x) = F'(x)$ だから $g'(F(x)) - g'(F'(x)) = 0$ ゆえ $g'(F) - g'(F') \in I(X)$ である. 以上より $g(F) - g'(F') =$

*¹⁴ 束における complement は補要素よりはむしろ補元と訳すことの方が多く思われる.

*¹⁵ 分配束においては $a \vee b = a \vee c, a \wedge b = a \wedge c$ ならば $b = c$ が成り立つことから, 補元は存在すれば唯一つであることがわかる. 詳しくは束論の教科書を参考のこと.

*¹⁶ 原著では “The subspace of $\text{Spec}(A)$ consisting of the maximal ideals of A , with the induced topology, is called the maximal spectrum of A and is denoted by $\text{Max}(A)$. For arbitrary commutative rings it does not have the nice functorial properties of $\text{Spec}(A)$ (see Exercise 21), ...” となっている.

*¹⁷ このあたりの記号は Hartshorne [6, 命題 3.5] を参考にした.

$(g(F) - g'(F)) + (g'(F) - g'(F')) \in I(X)$. $\alpha(\phi): \eta \mapsto \eta \circ \phi$ が k 代数準同型であることは (代入しているだけなので) 明らか.*¹⁸

(β の well-definedness) $h(\overline{s_i})$ の 2 つの代表元 $\xi_i, \xi'_i \in k[t_1, \dots, t_n]$ をとると $\xi_i - \xi'_i \in I(X)$ だから任意の $x \in X$ に対し $\xi_i(x) - \xi'_i(x) = 0$ である. よって任意の $x \in X$ に対し $(\xi_1(x), \dots, \xi_m(x)) = (\xi'_1(x), \dots, \xi'_m(x))$ となり, 代表元のとり方によらずに同じ正則写像 $X \rightarrow k^m$ が定まる. 最後に, この正則写像 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ が $\xi \in \text{Hom}(X, Y)$ となること, すなわち任意の $x \in X$ に対し $\xi(x) \in Y$ となることを示す.*¹⁹ そのために, 部分集合 $J \subseteq k[s_1, \dots, s_m]$ に対し共通零点の集合を $Z(J) := \{P \in k^m : \text{任意の } f \in J \text{ に対し } f(P) = 0\}$ とおくと $Z(I(Y)) \subseteq Y$ となることを示す. Y はアフィン多様体だから, ある部分集合 $J \subseteq k[s_1, \dots, s_m]$ によって $Y = Z(J)$ と書ける. J の任意の元は J の共通零点 $Z(J)$ 上で明らかに 0 となるから $J \subseteq I(Z(J))$ である. このとき両辺に Z を適用すると包含関係が逆転して $Z(J) \supseteq Z(I(Z(J)))$ となり, $Z(I(Y)) \subseteq Y$ を得る. したがって任意の $x \in X$ に対して $\xi(x) \in Z(I(Y))$ を示せばよい. 任意の $g(s_1, \dots, s_m) \in I(Y)$ に対して, h が k 準同型であることより $g(\xi_1, \dots, \xi_m) \in g(h(\overline{s_1}), \dots, h(\overline{s_m})) = h(g(\overline{s_1}, \dots, \overline{s_m})) = h(\overline{g(s_1, \dots, s_m)}) = h(\overline{0}) = \overline{0} = I(X)$ となるから任意の $x \in X$ に対し $g(\xi_1(x), \dots, \xi_m(x)) = 0$ となり, よって $\xi(x) \in Z(I(Y))$.

$$(\beta \circ \alpha = \text{id}_{\text{Hom}(X, Y)}) \quad \beta \circ \alpha(\phi) = \beta(\eta \mapsto \eta \circ \phi) = (\overline{s_1} \circ \phi, \dots, \overline{s_m} \circ \phi) = \phi.$$

$$(\alpha \circ \beta = \text{id}_{\text{Hom}(P(Y), P(X))}) \quad \alpha \circ \beta(h) = \alpha(h(\overline{s_1}), \dots, h(\overline{s_m})) = \eta \mapsto \eta(h(\overline{s_1}), \dots, h(\overline{s_m})) = \eta \mapsto h(\eta(\overline{s_1}, \dots, \overline{s_m})) = \eta \mapsto h(\eta) = h. \quad (3 \text{ つ目の等号は } h \text{ が } k \text{ 代数準同型であることから.})$$

*¹⁸ $\eta \mapsto \eta \circ \phi$ が k 代数準同型なので実際には $g = 0$ に対して示せば十分である. しかし $\text{Hom}(X, Y)$ は環ではないので ϕ についてはそのようなことはできない. (一般に $F - F' \notin \text{Hom}(X, Y)$ である.)

*¹⁹ [2] の全射性の証明はこれが抜けているように思う.

- 2 加群
- 3 商環と商加群
- 4 準素分解
- 5 整従属と付値
- 6 連鎖条件
- 7 ネーター環
- 8 アルティン環
- 9 離散付値環とデデキント整域
- 10 完備化
- 11 次元論

参考文献

- [1] M. F. Atiyah & I. G. MacDonald (新妻弘訳), 可換代数入門, 共立出版, 2006.
- [2] 可換環入門を読んで, <http://www.geocities.jp/mathlife1/>.
- [3] 永田雅宜, 可換体論, 裳華房, 1967.
- [4] Q. Liu, Algebraic Geometry and Arithmetic Curves, Oxford University Press, 2002.
- [5] Pieter Belmans, Atlas of Spec $\mathbb{Z}[x]$, <http://pbelmans.ncag.info/blog/atlas/>.
- [6] R. Hartshorne (高橋宣能・松下大介訳), 代数幾何学 1, 丸善出版, 2013.

変更履歴

2017/06/18 1章まで