Gödel の不完全性定理 *

y.†

2016 年 11 月 12 日

最終更新日:2016 年 11 月 13 日

概要

Gödel の不完全性定理とは，おおざっぱに言えば，ある程度の算術を扱える無矛盾な形式体系には証明も反証もできない論理式が存在し (第一不完全性定理)，また体系自身の無矛盾性を証明することはできない (第二不完全性定理) というものである．本稿ではこの Gödel の不完全性定理について，その意味内容と証明の概略を述べる．

約束事

本稿を通じて，各種の用語・記号を次の意味で用いる．

- 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ には 0 を含める．
- 2 つの記号列 E_1, E_2 が等しいことを $E_1 \equiv E_2$ で表す．
- $A := B, A :\equiv B, A :\Longleftrightarrow B$ などは全て左辺 A を右辺 B で定義することを表す．

1　導入

1931 年に Kurt Gödel が証明した**不完全性定理** (incompleteness theorem) は誤解を恐れずに言えば次のような定理である．

> ある程度の算術を扱うことのできる無矛盾な形式体系には証明も反証もできない論理式が存在し，また体系自身の無矛盾性を証明することはできない．

この主張の前半部分を第一不完全性定理，後半部分を第二不完全性定理という．

それにしても上の主張における “ある程度の算術”，“無矛盾”，“形式体系”，“証明”，“論理式”，“体系自身の無矛盾性” とは何なのか？ いったいどういう意味なのか？ これらの数学的な定義を明らかにし，定理の意味を概説することが本稿の主題である．

---

* この文書は，都数の TS で発表した内容を公開用に修正したものです．

† http://iso.2022.jp/

2　1 階述語論理の体系

「証明不可能である」ことを証明するためには，あらかじめ「証明とは何か」が数学的にきちんと定義されている必要がある．本稿ではこのような議論の土台となる形式体系として **1 階述語論理** (first-order logic) と呼ばれる体系を用いる．この小節ではまず論理式を定義し，次いで論理式の有限列たる証明を定義する．

定義 2.1 (記号).　論理式や証明を記述するために，本稿では次の記号を用いる．

変数記号　可算個の変数記号 $\mathrm{v}_0, \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots$ ($x, y, z, \ldots$ などで表す．[*1])
非論理記号　2 変数関係記号 $=, <$，2 変数関数記号 $+, \times$，1 変数関数記号 $\mathtt{s}$，定数記号 (0 変数関数記号)$\mathtt{0}$
論理記号　命題定数記号 $\perp$，論理結合子 $\rightarrow$，存在量化子 $\exists$

この他に括弧 (,) も使う．ここで挙げたもの以外にも様々な記号を用いるが，それらは本稿では後に省略記法として導入することにする．

定義 2.2 (項).　**項** (term) を以下のように帰納的に定義する．

- $\mathtt{0}$ と変数は項である．
- t が項ならば $\mathtt{s}(t)$ も項である．
- t, u が項ならば $(t + u), (t \times u)$ も項である．

すなわち，項とは「自然数を表していることを意図する記号列」のことである．上の定義に厳格に従えば $\mathtt{0} + \mathtt{0}$ などは (括弧がないので) 項ではないが，煩雑さを避けるため括弧は適宜省略することにする．たとえば $((\mathtt{s}(\mathtt{s}(\mathtt{0})) \times x) + \mathtt{s}(\mathtt{0}))$ は単に $\mathtt{ss0} \times x + \mathtt{s0}$ と書く．

項全体の集合を Tm で表す．また自然数 n の**数項** (numeral) $\overline{n} \in \mathrm{Tm}$ を次のように定める．

$$\overline{n} :\equiv \overbrace{\mathtt{ss}\cdots\mathtt{s}}^{n\text{ 個}}\mathtt{0}.$$

変数を含まない項を**閉項** (closed term) という．

定義 2.3 (論理式).　**論理式** (formula) を以下のように帰納的に定義する．

- $\perp$ は論理式である．
- t, u が項ならば $t = u, t < u$ は論理式である．
- φ, ψ が論理式ならば $(\varphi \rightarrow \psi)$ も論理式である．
- φ が論理式で x が変数ならば $\exists x \varphi$ も論理式である．

特に，$\perp, t = u, t < u$ の形の論理式を**原子論理式** (atomic formula) という．

項のときと同様にして，論理式も適宜括弧を省略して書く．特に，$\varphi \rightarrow \psi \rightarrow \theta$ と書いたら $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)$ を意味するものとしておく．$\perp$ は矛盾 (常に偽の命題) を意図する記号である．

論理式全体の集合を Fml で表す．

また，定義 2.1 で挙げたもの以外の記号を次のような省略記法として導入する．

[*1] 正確に言えば，$x, y, z, \ldots$ は変数記号 $\mathrm{v}_0, \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots$ を指すメタ変数である．

$$
\begin{aligned}
\neg\varphi &:\equiv \varphi \to \bot & t \neq u &:\equiv \neg t = u \\
\varphi \land \psi &:\equiv \neg(\varphi \to \neg\psi) & t \leq u &:\equiv t < u \lor t = u \\
\varphi \lor \psi &:\equiv (\varphi \to \psi) \to \psi & (\exists x < t)\varphi &:\equiv \exists x(x < t \land \varphi) \\
\varphi \leftrightarrow \psi &:\equiv (\varphi \to \psi) \land (\psi \to \varphi) & (\forall x < t)\varphi &:\equiv \exists x(x < t \to \varphi) \\
\forall x\varphi &:\equiv \neg\exists x\neg\varphi & &
\end{aligned}
$$

例 2.4. 次の論理式を考える．

$$\mathrm{Prime}(x) :\equiv \mathsf{0} < x \land (\forall u < x)(\forall v < x)(u \times v \neq x). \tag{1}$$

これは「x は素数である」という意味になることを意図した論理式である．この Prime を使って，さらに次のような論理式を作ることができる．

$$\forall x\exists y(x < y \land \mathrm{Prime}(y)) \tag{2}$$

これは「素数は無限に存在する」という意味になることを意図した論理式である．

論理式 (2) は自然に真偽を問える言明になっているのに対し，論理式 (1) では変数 x に特定の値を “代入” することによって初めて真偽を問える言明になる．もう少しきちんと書けば次のようになる．

定義 2.5 (閉論理式). 論理式 (1) における変数 x のように，量化子 $\exists, \forall$ によって指定されておらず，値を代入することができる変数のことを**自由変数** (free variable) といい，そうでない変数，すなわち論理式 (1) における変数 u, v のように量化子によって指定されている変数のことを**束縛変数** (bound variable) という．自由変数を持たない論理式を**閉論理式** (closed formula) あるいは**文** (sentence) という．[*2] x を自由変数に持つ (かもしれない) 論理式 $\varphi(x)$ に項 t を代入した結果を $\varphi(t)$ で表す．[*3]

自由変数，束縛変数，代入についてはもっと正確に，帰納的な定義を行うこともできる．詳しくは新井 [2] や古森・小野 [12] などを参照のこと．

次に，証明を「特定の条件を満たす論理式の列」として定義する．

定義 2.6 (証明体系 HK). Hilbert 流の証明体系 **HK** は次の**公理** (axiom) と**推論規則** (inference rule) からなる．[*4]

■公理

- 命題論理の公理

$$
\begin{array}{cl}
(\mathbf{K}) & \varphi \to \psi \to \varphi \\
(\mathbf{S}) & (\varphi \to \psi \to \theta) \to (\varphi \to \psi) \to \varphi \to \theta \\
(\bot) & \bot \to \varphi \\
(\neg\neg) & \neg\neg\varphi \to \varphi
\end{array}
$$

[*2] しかし，自由変数を持つ論理式のことを開論理式とは言わない．

[*3] $\varphi(x)$ は x を含む必要はない．その場合 $\varphi(t)$ は $\varphi(x)$ と全く同じ記号列を表す．

[*4] 正確に言えばこれらは**公理型** (axiom scheme) であって，φ や ψ に任意の論理式を代入することによって一つ一つの公理が得られる．すなわち，**HK** は可算無限個の公理を持つ．

- 等号公理

$$\forall x(x = x)$$
$$\forall x \forall y(x = y \to y = x)$$
$$\forall x \forall y \forall z(x = y \to y = z \to x = z)$$
$$\forall x_1 \forall y_1 \forall x_2 \forall y_2(x_1 = y_1 \to x_2 = y_2 \to x_1 < x_2 \to y_1 < y_2)$$
$$\forall x_1 \forall y_1 \forall x_2 \forall y_2(x_1 = y_1 \to x_2 = y_2 \to x_1 + x_2 = y_1 + y_2)$$
$$\forall x_1 \forall y_1 \forall x_2 \forall y_2(x_1 = y_1 \to x_2 = y_2 \to x_1 \times x_2 = y_1 \times y_2)$$
$$\forall x_1 \forall y_1(x_1 = y_1 \to \mathtt{s}(x_1) = \mathtt{s}(y_1))$$

- 量化公理

$$\varphi(t) \to \exists x \varphi(x) \quad (\text{ただし } t \text{ は任意の項}^{*5})$$

■**推論規則**

- モーダスポーネンス (Modus Ponens, (**MP**))

$$\frac{\varphi \to \psi \quad \varphi}{\psi} \ (\mathbf{MP})$$

  これは「$\varphi \to \psi$ と φ から ψ が得られる」という意味である．(詳細は定義 2.7 で述べる．)
- 全称化 (Generalization, $(\exists)$)
  変数 v が $\exists y \psi(y)$ と φ に自由に現れていないとして

$$\frac{\psi(v) \to \varphi}{\exists y \psi(y) \to \varphi} \ (\exists)$$

定義 2.7 (理論，証明)． 一般に，論理式からなる集合 $T \subset \mathrm{Fml}$ を**理論** (theory) あるいは公理系という．T の元のことも公理と呼ぶ．*6

論理式 φ の理論 T からの**証明** (proof) とは，論理式の有限列 $\psi_1, \ldots, \psi_n \equiv \varphi$ であって，各 i $(1 \leq i \leq n)$ について次のうちいずれかを満たすものである．

- ψ_i は **HK** の公理であるかまはたは T の元である
- ψ_i は列の前のものから推論規則 (**MP**) により得られる，すなわちある $j, k < i$ があって $\psi_k \equiv \psi_j \to \psi_i$ となっている
- ψ_i は列の前のものから推論規則 $(\exists)$ により得られる，すなわちある $j < i$ があって $\psi_j \equiv \theta(v) \to \eta, \psi_i \equiv \exists y \theta(y) \to \eta$ という形をしている

論理式 φ の理論 T からの証明が存在するとき，φ は T から**証明可能** (provable) であるといい，また φ は T の**定理** (theorem) であるという．φ が T から証明可能であることを

$$T \vdash \varphi$$

*5 厳密に言えば，t は φ において x に関して自由である (すなわち，$\varphi(x)$ に t を代入しても t 内の変数が φ 内の量化子に束縛されることはない) という場合に限る．
*6 **HK** の公理と T の元を区別したいときは，前者を論理的公理，後者を非論理的公理ということがある．

で表す．$T \vdash \varphi$ でないことを $T \nvdash \varphi$ で表す．$T \vdash \neg\varphi$ であるとき，T は φ を**反証** (disprove) するという．

理論 T と論理式の有限集合 $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ に対し，理論 $T \cup \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ のことを $T + \psi_1 + \cdots + \psi_n$ とも書く．

例 2.8. 任意の論理式 φ について，**HK** における (理論 $\emptyset$ からの) $\varphi \to \varphi$ の証明の例を以下に示す．

(1) $(\varphi \to (\varphi \to \varphi) \to \varphi) \to (\varphi \to \varphi \to \varphi) \to \varphi \to \varphi$ (**S**)

(2) $\varphi \to (\varphi \to \varphi) \to \varphi$ (**K**)

(3) $(\varphi \to \varphi \to \varphi) \to \varphi \to \varphi$ (1, 2 **MP**)

(4) $\varphi \to \varphi \to \varphi$ (**K**)

(5) $\varphi \to \varphi$ (3, 4 **MP**)

この例からもわかるように，単純な論理式であっても **HK** における証明はかなり複雑なものになる．しかし，実は次のような定理が成り立つ．

事実 2.9 (演繹定理, deduction theorem). 任意の理論 T と論理式 φ, ψ に対し，

$$T + \varphi \vdash \psi \iff T \vdash \varphi \to \psi.$$

すなわち，$\varphi \to \psi$ という形の論理式を証明したければ，φ を仮定して ψ を示せばよい．証明は証明の長さに関する帰納法による．詳細は新井 [2] などを参照のこと．

次に，不完全性定理を成り立たせるのに十分な公理を持つ理論 PA を導入する．

定義 2.10 (PA). 算術の理論 PA (Peano arithmetic) は次の公理からなる．

s に関する公理

$\forall x(\mathsf{s}(x) \neq \mathsf{0})$

$\forall x \forall y(\mathsf{s}(x) = \mathsf{s}(y) \to x = y)$

+ に関する公理

$\forall x(x + \mathsf{0} = x)$

$\forall x \forall y(x + \mathsf{s}(y) = \mathsf{s}(x + y))$

× に関する公理

$\forall x(x \times \mathsf{0} = \mathsf{0})$

$\forall x \forall y(x \times \mathsf{s}(y) = x \times y + x)$

< に関する公理

$\forall x \neg(x < \mathsf{0})$

$\forall x \forall y(x < \mathsf{s}(y) \leftrightarrow x \leq y)$

帰納法の公理 変数の列 $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_k)$ と任意の論理式 $\varphi(x, \vec{y})$ について

$\forall \vec{y}(\varphi(0, \vec{y}) \land \forall x(\varphi(x, \vec{y}) \to \varphi(\mathsf{s}(x), \vec{y})) \to \forall x \varphi(x, \vec{y}))$

任意の論理式に対し，それに対応する帰納法の公理があるので PA は可算無限個の公理からなる理論である．

例 2.11. PA から $\overline{1} + \overline{1} = \overline{2}$ を証明してみよう．一般に，$\forall x \varphi(x)$ という形の論理式があれば，$\neg\varphi(x)$ についての量化公理の対偶 $\forall x \varphi(x) \to \neg\neg\varphi(t)$ と $(\neg\neg)$ から $\varphi(t)$ を得ることができる．このような操作を**全称例化** (universal instanciation, UI) ということがある．これを用いると，$\overline{1} + \overline{1} = \overline{2} \equiv \mathsf{s0} + \mathsf{s0} = \mathsf{ss0}$ は次のよ

うに証明できる．

(1) $\forall x \forall y(x+\mathtt{s}(y)=\mathtt{s}(x+y))$ (+ に関する公理)
(2) $\mathtt{s0}+\mathtt{s0}=\mathtt{s}(\mathtt{s0}+\mathtt{0})$ (1 を 2 回 UI)
(3) $\forall x(x+\mathtt{0}=x)$ (+ に関する公理)
(4) $\mathtt{s0}+\mathtt{0}=\mathtt{s0}$ (3 を UI)
(5) $\mathtt{s}(\mathtt{s0}+\mathtt{0})=\mathtt{ss0}$ (4 と等号公理)
(6) $\mathtt{s0}+\mathtt{s0}=\mathtt{ss0}$ (2, 5 と等号公理)

上の証明で「等号公理」と書いてあるところは本当は「等号公理を全称例化したものと (**MP**) する」などと書くべきであろうが，不明瞭なところは何もないので省略する．

項や論理式は素朴には意味を持たないただの記号列である．ここで，論理式を解釈してその真偽を定める方法を導入する．

定義 2.12 (論理式の真偽). まず，閉項 t の標準モデル $\mathbb{N}$ における**解釈** (interpretation) $t^{\mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ を次のように帰納的に定義する．

- $\mathtt{0}^{\mathbb{N}} := 0$,
- $\mathtt{s}(t)^{\mathbb{N}} := t^{\mathbb{N}}+1$,
- $(t+u)^{\mathbb{N}} := t^{\mathbb{N}}+u^{\mathbb{N}}$, (右辺の + は自然数の通常の加法)
- $(t\times u)^{\mathbb{N}} := t^{\mathbb{N}}\cdot u^{\mathbb{N}}$.

そして閉論理式 φ が標準モデル $\mathbb{N}$ において**真** (true) であることを次のように帰納的に定義する．ただし，φ が $\mathbb{N}$ において真であることを $\mathbb{N}\models\varphi$ で表し，そうでないことを，すなわち φ が $\mathbb{N}$ において**偽** (false) であることを $\mathbb{N}\not\models\varphi$ で表す．

- $\mathbb{N}\not\models\bot$,
- $\mathbb{N}\models t=u \;:\Longleftrightarrow\; t^{\mathbb{N}}=u^{\mathbb{N}}$,　(ただし t,u は閉項)
- $\mathbb{N}\models t<u \;:\Longleftrightarrow\; t^{\mathbb{N}}<u^{\mathbb{N}}$,　(ただし t,u は閉項)
- $\mathbb{N}\models\varphi\to\psi \;:\Longleftrightarrow\; \mathbb{N}\not\models\varphi$ または $\mathbb{N}\models\psi$,
- $\mathbb{N}\models\exists x\varphi(x) \;:\Longleftrightarrow\;$ ある $n\in\mathbb{N}$ が存在して $\mathbb{N}\models\varphi(\overline{n})$.

ここで導入した解釈の仕方によって，定義 2.3 で導入した省略記法の意味もわかってもらえるものと思う．特に，「$\bot$ は常に偽となる論理式である」ことはここで解釈を定義したことによって初めて正当化される．

以降，「φ は標準モデル $\mathbb{N}$ で真である」ということを単に「φ は真である」や「φ は正しい」と言うことにする．

例 2.13. 例 2.4 の $\mathrm{Prime}(x)$ を用いると，$\mathbb{N}\models\mathrm{Prime}(2)$ や $\mathbb{N}\not\models\mathrm{Prime}(6)$ などが成り立つことがわかる．

3　PA の証明能力

ここでは PA の証明能力について調べる．不完全性定理で特に重要なのは PA の Σ_1 完全性である．

定理 3.1. PA は，原子論理式あるいはその否定の形の正しい閉論理式を全て証明できる．具体的には，任意の閉項 t, u に対し次が成り立つ．

- $\mathbb{N} \models t = u$ ならば $\mathsf{PA} \vdash t = u$,
- $\mathbb{N} \models t \neq u$ ならば $\mathsf{PA} \vdash t \neq u$,
- $\mathbb{N} \models t < u$ ならば $\mathsf{PA} \vdash t < u$,
- $\mathbb{N} \models \neg t < u$ ならば $\mathsf{PA} \vdash \neg t < u$.

証明. より一般に，任意の閉項 t に対し $\mathsf{PA} \vdash t = \overline{t^{\mathbb{N}}}$ であることを示せば十分である．t の構造に関する帰納法を用いる．例として $t \equiv u_1 + u_2$ の形の場合だけ示す．帰納法の仮定より $\mathsf{PA} \vdash u_1 = \overline{u_1^{\mathbb{N}}}, \mathsf{PA} \vdash u_2 = \overline{u_2^{\mathbb{N}}}$ である．よって等号公理から $\mathsf{PA} \vdash u_1 + u_2 = \overline{u_1^{\mathbb{N}}} + \overline{u_2^{\mathbb{N}}}$ を得る．したがって一般に任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して $\mathsf{PA} \vdash \overline{m} + \overline{n} = \overline{m+n}$ であることを示せば証明が終わる．これを n に関する帰納法で示す．(これは PA の公理ではなく，普通の意味での帰納法である．) $\mathsf{PA} \vdash \overline{m} + \mathsf{0} = \overline{m}$ は $+$ に関する公理の 1 つ目そのものである．$\mathsf{PA} \vdash \overline{m} + \overline{n} = \overline{m+n}$ であるとき，$+$ に関する公理の 2 つ目から $\mathsf{PA} \vdash \overline{m} + \mathsf{s}(\overline{n}) = \mathsf{s}(\overline{m} + \overline{n})$ となり，等号公理と合わせて $\mathsf{PA} \vdash \overline{m} + \mathsf{s}(\overline{n}) = \mathsf{s}(\overline{m+n})$ を得る． □

定義 3.2 ($\Sigma_1, \Pi_1, \Delta_1$)**.** Σ_1 **論理式** (Σ_1-formula) を以下のように帰納的に定義する．

- 原子論理式とその否定は Σ_1 論理式である．
- φ, ψ が Σ_1 論理式ならば $\varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi$ も Σ_1 論理式である．
- φ が Σ_1 論理式ならば $\exists x\varphi, (\forall x < t)\varphi$ も Σ_1 論理式である．(t は x を含まない項)

次に Π_1 **論理式** (Π_1-formula) を Σ_1 論理式の否定として，Δ_1 **論理式** (Δ_1-formula) を Σ_1 かつ Π_1 であるものとして定義する．すなわち，論理式 φ が Π_1 論理式であるとは，ある Σ_1 論理式 ψ が存在して

$$\mathsf{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \neg\psi$$

が成り立つことである．

変数 x を含まない項 t について，$(\exists x < t), (\forall x < t)$ の形の量化子を**限定量化子** (restricted quantifier) あるいは**有界量化子** (bounded quantifier) という．したがって，Σ_1 論理式とは，内部に現れる $\forall$ が全て限定量化子になっている論理式であると言うことができる．同様に，Π_1 論理式とは，内部に現れる $\exists$ が全て限定量化子になっている論理式である．

定理 3.3 (Σ_1 完全性)**.** PA は正しい Σ_1 文 (Σ_1 論理式であるような閉論理式) を全て証明できる．すなわち任意の Σ_1 文 φ に対し，$\mathbb{N} \models \varphi$ ならば $\mathsf{PA} \vdash \varphi$ である．

証明. φ の構造に関する帰納法による．(正確には $\to, \exists$ の数に関する帰納法であり，したがって項の複雑さは関係がない．) φ が原子論理式あるいはその否定の場合は定理 3.1 で示した．$\varphi \equiv \psi \wedge \theta$ という形の場合には，$\mathbb{N} \models \psi$ かつ $\mathbb{N} \models \theta$ だから $\mathsf{PA} \vdash \psi$ かつ $\mathsf{PA} \vdash \theta$ より $\mathsf{PA} \vdash \psi \wedge \theta$ を得る．$\varphi \equiv \psi \vee \theta$ という形の場合には，$\mathbb{N} \models \psi$ または $\mathbb{N} \models \theta$ だから $\mathsf{PA} \vdash \psi$ または $\mathsf{PA} \vdash \theta$ であり，どちらにせよ $\mathsf{PA} \vdash \psi \vee \theta$ となる．$\varphi \equiv \exists x\psi(x)$ という形の場合には，仮定からある自然数 $n \in \mathbb{N}$ が存在して $\mathbb{N} \models \psi(\overline{n})$ となるので，帰納法の仮定から $\mathsf{PA} \vdash \psi(\overline{n})$ となる．よって量化公理と (**MP**) して $\mathsf{PA} \vdash \exists x\psi(x)$ を得る．$\varphi \equiv (\forall x < t)\psi$ という形の場合には，実は $\mathsf{PA} \vdash (\forall x < t)\psi \leftrightarrow \psi(\mathsf{0}) \wedge \psi(\overline{1}) \wedge \cdots \wedge \psi(\overline{t^{\mathbb{N}} - 1})$ であることが言えるので，これを用いればよい． □

定義 3.4 (Σ_1 完全性). 理論 T が正しい Σ_1 文を全て証明できるとき，T は Σ_1 **完全** (Σ_1-complete) であるという．PA は Σ_1 完全である．

4 計算論

ここでは計算可能性に関するいくつかの事実を述べる．

自然数上の k 変数関数 $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ が**計算可能** (computable) であるとは，f を計算するアルゴリズムが存在すること，言い換えれば，メモリ容量が無限大の理想的なコンピュータで原理的には計算できる関数のことである．また，自然数上の k 変数述語 $R \subset \mathbb{N}^k$ が計算可能であるとは，その特性関数

$$\chi_R(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & R(\vec{x}) \text{ が成り立つとき} \\ 0 & R(\vec{x}) \text{ が成り立たないとき} \end{cases}$$

が計算可能であることと定める．ただし，k 変数述語と $\mathbb{N}^k$ の部分集合は同一視している．

計算可能性にはもっと正確な定義を与えることもできるが，本筋から逸れてしまうので本稿では省略する．

定義 4.1 (計算可能集合，RE 集合). 自然数の部分集合 $A \subset \mathbb{N}$ に対し，

- A が計算可能集合であるとは，A を述語とみなしたときに計算可能であることである．
- A が **RE 集合** (recursively enumerable set，計算的枚挙可能集合) であるとは，A の要素を列挙するプログラムが存在することである．言い換えると，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$n \in A$ ならば有限ステップで停止して YES を返し，$n \notin A$ ならば無限ループに陥り停止しないようなプログラムが存在することである．

明らかに，計算可能ならば RE であるが，逆は成り立たない．これは次のように対角線論法を使って示すことができる．

例 4.2 (RE だが計算可能でない集合). 1 変数計算可能部分関数 $\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$ を考える．ここで**部分関数** (partial function) とは，入力によっては無限ループに陥るなどして永久に計算結果が返ってこないかもしれないようなプログラムのことである．部分関数 $f\colon \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$ が入力 x のとき計算が停止することを $f(x)\downarrow$ で表す．1 変数計算可能部分関数を計算するプログラム全体を辞書順で一列に並べて

$$P_0, P_1, P_2, \ldots$$

とする．このとき

$$K := \{\, i \in \mathbb{N} \mid P_i(i)\downarrow \}$$

とおくと，これが求める集合である．まず K が RE であることは「s ステップ目に $P_0(0), \ldots, P_s(s)$ のそれぞれの計算を s ステップ目までシミュレートし，停止したものから順にその番号を出力する」というプログラムが作れることからわかる．次に K が計算可能でないことを示す．もし K が計算可能集合であったとすると，次のようなプログラム P を作ることができる．

$$P(i) := \begin{cases} P_i(i) + 1 & P_i(i)\downarrow \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

この P は 1 変数の計算可能部分関数であるから，ある k が存在して $P = P_k$ となるはずである．しかし，$P(k)$ と $P_k(k)$ は計算結果が異なるので矛盾を生じる．

定義 4.3 (表現可能性). 自然数上の関数や述語が PA において**表現** (represent) される，あるいは**表現可能** (representable) であるということを次のように定義する．

(1) $R \subset \mathbb{N}^k$ を k 変数述語とする．$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ 以外に自由変数を持たない論理式 $\varphi(\vec{x})$ が存在して，任意の $\vec{n} = (n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k$ に対して

$$R(\vec{n})\text{が成り立つならば } \mathsf{PA} \vdash \varphi(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}),$$
$$R(\vec{n})\text{が成り立たないならば } \mathsf{PA} \vdash \neg\varphi(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k})$$

を満たすとき，述語 R は PA において論理式 $\varphi(\vec{x})$ によって表現されるといい，またこのような φ が存在するときに R は PA で表現可能であるという．

(2) $f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ を自然数上の k 変数関数とする．$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_k), y$ 以外に自由変数を持たない論理式 $\varphi(\vec{x}, y)$ が存在して，$(k+1)$ 変数述語

$$f(n_1, \ldots, n_k) = n_{k+1}$$

が PA において $\varphi(x_1, \ldots, x_k, y)$ によって表現され，任意の自然数 $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mathsf{PA} \vdash \forall y \forall z (\varphi(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, y) \land \varphi(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, z) \to y = z)$$

が成り立つならば関数 f は PA において論理式 $\varphi(\vec{x}, y)$ によって表現されるといい，またこのような φ が存在するときに f は PA において表現可能であるという．

表現可能性に関して，実は次のような定理が成り立つ．証明は鹿島 [1] などを参照のこと．

事実 4.4 (表現定理). 任意の計算可能関数 $f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ は，適当な Σ_1 論理式および適当な Π_1 論理式によって PA において表現される．すなわち，ある Δ_1 論理式 $\chi(\vec{x}, y)$ が存在して任意の $\vec{n} = (n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k$ に対し次が成り立つ．

$$\mathsf{PA} \vdash \forall y (y = \overline{f(\vec{n})} \leftrightarrow \chi(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, y)).$$

計算可能述語 R についても，特性関数 χ_R を表現する論理式を $\chi(\vec{x}, y)$ とすれば $\chi(\vec{x}, \overline{1})$ で表現することができる．

5 算術化

PA の公理や証明は有限個の記号の並びであり，しかも記号列が与えられたときにそれが公理であることや証明であることは機械的に判定できる．したがってこれらは計算の対象となる有限的対象であり，適切な方法により自然数で表すことができる．こうして論理式や証明のような記号列に関する性質・操作を自然数に対する性質・操作に置き換える手法を**算術化** (arithmetization) という．算術化を通して，PA は自身の証明能力について語りうることになる．

算術化に際し，次の定理を利用する．

事実 5.1 (有限列コード化定理). ある計算可能関数 $\mathrm{decode}(x, y)$ が存在して，任意の $k \in \mathbb{N}$ と有限列 $(x_0, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k$ に対してある自然数 $e \in \mathbb{N}$ が存在し，各 $i\,(0 \leq i \leq k)$ について

$$\mathrm{decode}(e, i) = x_i$$

が成り立つ．

証明には中国剰余定理などを用いる．詳細は鹿島 [1]，Boolos [4] などを参照のこと．この定理により，自然数の有限列を 1 つの自然数で表すことができるようになる．

定義 5.2 (Gödel 数). 定数・変数・項・論理式といった各記号列 E に，それらの構造に沿って帰納的に **Gödel 数** (Gödel number) $\ulcorner E \urcorner$ を割り当てる．そのために次の Cantor の対関数 (の 2 倍) を用いる．

$$\mathrm{dpair}(m,n) := (m+n)(m+n+1)+2m.$$

これは $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ から非負偶数全体への全単射である．

まず命題定数 $\perp$ と定数 $\mathtt{0}$ と変数記号 $\mathtt{v}_0, \mathtt{v}_1, \mathtt{v}_2, \ldots$ には奇数を割り当てる．

$$\ulcorner \perp \urcorner := 1, \ulcorner \mathtt{0} \urcorner := 3, \ulcorner \mathtt{v}_0 \urcorner := 5, \ulcorner \mathtt{v}_1 \urcorner := 7, \ulcorner \mathtt{v}_2 \urcorner := 9, \ldots$$

次に項の Gödel 数を次のように帰納的に定義する．

$$\begin{aligned}
\ulcorner \mathtt{s}(t) \urcorner &:= \mathrm{dpair}(0, \ulcorner t \urcorner),\\
\ulcorner t+u \urcorner &:= \mathrm{dpair}(1, \mathrm{dpair}(\ulcorner t \urcorner, \ulcorner u \urcorner)),\\
\ulcorner t\times u \urcorner &:= \mathrm{dpair}(2, \mathrm{dpair}(\ulcorner t \urcorner, \ulcorner u \urcorner)).
\end{aligned}$$

同様に論理式の Gödel 数を次のように帰納的に定義する．

$$\begin{aligned}
\ulcorner t=u \urcorner &:= \mathrm{dpair}(3, \mathrm{dpair}(\ulcorner t \urcorner, \ulcorner u \urcorner)),\\
\ulcorner t<u \urcorner &:= \mathrm{dpair}(4, \mathrm{dpair}(\ulcorner t \urcorner, \ulcorner u \urcorner)),\\
\ulcorner \varphi\to\psi \urcorner &:= \mathrm{dpair}(5, \mathrm{dpair}(\ulcorner \varphi \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner)),\\
\ulcorner \exists x\varphi \urcorner &:= \mathrm{dpair}(6, \mathrm{dpair}(\ulcorner x \urcorner, \ulcorner \varphi \urcorner)). \quad (\text{ただし } x \text{ は } \mathtt{v}_i \text{ のいずれか})
\end{aligned}$$

証明の Gödel 数の定義には事実 5.1 を用いる．証明 $\psi_0, \ldots, \psi_n$ から作られる有限列 $(\ulcorner \psi_0 \urcorner, \ldots, \ulcorner \psi_n \urcorner)$ に対して存在する $e\in\mathbb{N}$ をとり，

$$\ulcorner \psi_0, \ldots, \psi_n \urcorner := \mathrm{dpair}(n, e)$$

と定める．*7

したがって，Gödel 数からもとの記号列を復元するには，奇数になるまで分解を繰り返せばよい．また，括弧については dpair を適用する順序によって区別できるので，括弧それ自体の Gödel 数を用意する必要はない．

定義 5.3 (拡大). T, U を理論とする．

- $U\subset T$ であるとき，T は U の**拡大** (extension) であるという．
- T が U の拡大であって，さらに T の公理の Gödel 数全体の集合

  $$\mathbf{Axiom}_T := \{\ulcorner \varphi \urcorner \mid \varphi\in T\}\subset\mathbb{N}$$

  が計算可能集合であるとき，T は U の**計算可能拡大**であるという．

*7 有限列のコード化を $(x_0, \ldots, x_k)\mapsto e = \mathrm{dpair}(\mathrm{dpair}(\cdots\mathrm{dpair}(\mathrm{dpair}(x_0, x_1), x_2), \cdots), x_k)$ と定義しようとしてもうまくいかない．というのも，$\mathrm{fst}(\mathrm{dpair}(x,y)) = x$ なる逆関数 fst を用いて $x_0 = \mathrm{fst}^k(e)$ とデコードできるが，「関数を k 回適用する」というのは原始再帰的な定義であり，原始再帰を算術の論理式で表現するのに有限列のコード化が必要だからである．

- T が U の拡大であって，$\mathbf{Axiom}_T$ が RE 集合であるとき，T は U の **RE 拡大**であるという．

Gödel 数は自然数であるから PA で扱うことができ，したがって PA は自らの証明可能性について言及することができる．

定義 5.4 (証明可能性述語). 理論 T に対して，自然数上の 2 変数述語 $\mathbf{Prov}_T$ を次のように定める．

$$\mathbf{Prov}_T(m,n) :\Longleftrightarrow n \text{ はある論理式 } \varphi \text{ の Gödel 数であり，} m \text{ は } \varphi \text{ の } T \text{ からの証明の Gödel 数である}$$

簡単に言えば「m は n の証明である」ということである．$\mathbf{Axiom}_T$ が計算可能[*8]ならば $\mathbf{Prov}_T$ も計算可能なので，表現定理 4.4 により $\mathbf{Prov}_T$ を表現する Σ_1 論理式 $\mathrm{Prov}_T(m,n)$ が存在する．この $\mathrm{Prov}_T(m,n)$ から Σ_1 論理式

$$\mathrm{Pr}_T(x) :\equiv \exists y\, \mathrm{Prov}_T(y,x)$$

を作ることができ，これを T の**証明可能性述語** (provability predicate) という．

証明可能性述語の定義から明らかに次が成り立つ．

$$T \vdash \varphi \iff \mathbb{N} \models \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}).$$

定義 5.5 (Σ_1 健全性). 理論 T が Σ_1 健全であるとは，T から証明される Σ_1 論理式が全て $\mathbb{N}$ で真であることをいう．

例 5.6. PA の定理は全て真だから，特に Σ_1 論理式についても真である．よって PA は Σ_1 健全である．

定理 5.7. 理論 T を PA の計算可能拡大とする．このとき次が成り立つ．

(1) $T \vdash \varphi$ ならば $\mathsf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner})$，すなわち $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner})$ である．
(2) T が Σ_1 健全で $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner})$ ならば $T \vdash \varphi$ である．

証明. Pr_T が Σ_1 論理式であることに注意する．(1) は PA の Σ_1 完全性 3.3 による．(2) は Σ_1 健全性の定義から明らか． $\square$

次に，不完全性定理の証明の鍵となる対角化定理を証明する．

定理 5.8 (対角化定理, diagonalization theorem). $\varphi(x)$ を x 以外を自由変数に持たない論理式とする．このとき，次の条件を満たす閉論理式 ψ が存在する．

$$\mathsf{PA} \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\overline{\ulcorner \psi \urcorner}).$$

証明. x 以外を自由変数に含まない論理式全体を，その Gödel 数が小さい順に並べて

$$A_0(x), A_1(x), A_2(x), \ldots$$

とする．自然数上の関数 $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を

$$f(n) := \ulcorner A_n(\overline{n}) \urcorner$$

[*8] 実は Craig のトリックと呼ばれる手法を用いると RE であってもよいことがわかる．詳細は鹿島 [1]，菊池 [3] などを参照のこと．

と定義すると，f は計算可能であるから計算可能関数の表現定理 4.4 によって，x, y 以外に自由変数を持たないある論理式 $\chi(x, y)$ が存在して，任意の自然数 $n \in \mathbb{N}$ について次が成り立つ．

$$\mathsf{PA} \vdash \forall y(y = \overline{f(n)} \to \chi(\overline{n}, y)), \tag{†}$$

$$\mathsf{PA} \vdash \forall y(y \neq \overline{f(n)} \to \neg\chi(\overline{n}, y)). \tag{‡}$$

ここで論理式 $\exists y(\chi(x, y) \wedge \varphi(y))$ を考えると，これは x 以外の自由変数を持たない論理式だからある自然数 $k \in \mathbb{N}$ が存在して

$$A_k(x) \equiv \exists y(\chi(x, y) \wedge \varphi(y))$$

となる．そこでこの k を用いて

$$\psi :\equiv \exists y(\chi(\overline{k}, y) \wedge \varphi(y))$$

とおく．このとき次を示せば証明が終わる．

$$\mathsf{PA} \vdash \varphi(\overline{\ulcorner\psi\urcorner}) \to \psi, \tag{$*$}$$

$$\mathsf{PA} \vdash \neg\varphi(\overline{\ulcorner\psi\urcorner}) \to \neg\psi. \tag{$**$}$$

まず k について (†) を全称例化して

$$\mathsf{PA} \vdash \overline{\ulcorner\psi\urcorner} = \overline{f(k)} \to \chi(\overline{k}, \overline{\ulcorner\psi\urcorner})$$

となるが，$f(k) = \ulcorner\psi\urcorner$ であることに注意すると等号公理から $\mathsf{PA} \vdash \chi(\overline{k}, \overline{\ulcorner\psi\urcorner})$ を得る．よって演繹定理 2.9 などから

$$\mathsf{PA} \vdash \varphi(\overline{\ulcorner\psi\urcorner}) \to \chi(\overline{k}, \overline{\ulcorner\psi\urcorner}) \wedge \varphi(\overline{\ulcorner\psi\urcorner})$$

が示せるので，量化公理と合わせて ($*$) を得る．

次に ($**$) を示す．一般に，($\exists$) の結論の対偶を取るなどして

$$\mathsf{PA} \vdash \neg\varphi(\overline{\ulcorner\psi\urcorner}) \to \forall y(y \neq \overline{\ulcorner\psi\urcorner} \vee \neg\varphi(y))$$

となる．したがって，$f(k) = \ulcorner\psi\urcorner$ と k についての (‡) と合わせて

$$\mathsf{PA} \vdash \neg\varphi(\overline{\ulcorner\psi\urcorner}) \to \forall y(\neg\chi(\overline{k}, y) \vee \neg\varphi(y))$$

を得る． □

なお，対角化定理はその形から不動点定理と呼ばれることもある．

6 不完全性定理

定義 6.1 (無矛盾性). 理論 T が**無矛盾** (consistent) であるとは，$T \nvdash \bot$ であるときをいう．無矛盾でないとき，**矛盾** (inconsistent) しているという．

Σ_1 健全性は無矛盾性を導く．なぜなら $\bot$ は Σ_1 論理式なので，矛盾したら Σ_1 健全でないからである．しかしこの逆は一般には成り立たない．後の注意 6.17 も参照のこと．

例 6.2 (PA の無矛盾性)**.** **HK** の公理と PA の公理はすべて正しく，**HK** の推論規則は正しさを保つので，PA は偽なる論理式を証明することはない．すなわち，PA は無矛盾である．

注意 6.3. 推論規則 $(\perp)$ があるので，T が矛盾することと T から任意の論理式が証明できることは同値である．あるいは，ある論理式 φ について $T \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$ が成り立つことと言ってもよい．

注意 6.4. 理論が無矛盾であるということは，$\mathbb{N}$ で偽となる論理式を証明しないということを含意しない．実際，$T = \{\mathsf{s0} = 0\}$ という単一の公理からなる理論は無矛盾であるが，[*9] $\mathbb{N}$ で偽となる論理式 $\mathsf{s0} = 0$ を証明する．無矛盾性は単に $\perp$ で終わる証明 (すなわち特定の条件を満たす記号の並び) が存在しないという構文論的な性質であり，$\mathbb{N}$ における真偽とは無関係である．後の注意 6.17 も参照のこと．

定義 6.5 (完全性)**.** 理論 T が完全 (complete) であるとは，任意の論理式 φ に対し $T \vdash \varphi$ または $T \vdash \neg\varphi$ の少なくとも一方が成り立つことである．[*10] 完全でないとき，不完全 (incomplete) であるという．

前節で証明した対角化定理を用いて Gödel の不完全性定理を証明する．

定理 6.6 (第一不完全性定理, **first incompleteness theorem**)**.** T を PA の Σ_1 健全な (したがって無矛盾な) 計算可能拡大とする．このとき，ある論理式 G が存在して $T \nvdash G$ かつ $T \nvdash \neg G$ が成り立つ．すなわち，T は不完全である．

証明. 対角化定理により，閉論理式 G を $T \vdash G \leftrightarrow \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner G \urcorner)$ を満たすように取る．もし $T \vdash G$ であったとすると，T の Σ_1 完全性から $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner G \urcorner)$ であるので，G の取り方から $T \vdash \neg G$ となる．したがって $T \vdash G \wedge \neg G$ となり，T が無矛盾であるという仮定に矛盾するから $T \nvdash G$ でなければならない．

次にもし $T \vdash \neg G$ であったとすると，G の取り方から $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner G \urcorner)$ である．したがって T の Σ_1 健全性から $T \vdash G$ を得るが，これは前半で示したことに矛盾するから $T \nvdash \neg G$ でなければならない． □

定義 6.7 (**Gödel** 文)**.** 定理 6.6 の証明で取った論理式 G を T の **Gödel 文** (Gödel sentence) という．

Gödel によるオリジナルの証明では Σ_1 健全性の代わりに ω 無矛盾性という性質を仮定している．しかし，ω 無矛盾性は Σ_1 健全性を導くので Σ_1 健全性の方が弱い仮定である．第一不完全性定理の仮定を弱めることに関しては，Rosser による次の事実が知られている．証明は鹿島 [1]，菊池 [3]，新井 [2] などを参照のこと．

事実 6.8 (**Rosser** の定理)**.** T を PA の無矛盾な RE 拡大とする．このとき，ある論理式 R (Rosser 文) が存在して $T \nvdash R$ かつ $T \nvdash \neg R$ が成り立つ．

第一不完全性定理から，PA が不完全なのは “公理が足りないから” ではないことがわかる．PA にどれだけ公理を付け足しても，無矛盾な RE 拡大である限り必ず不完全である．

注意 6.9 (**Gödel** 文の真偽)**.** Gödel 文の取り方から $\mathbb{N} \models G \iff T \nvdash G$ であり，T が無矛盾なら第一不完全性定理より $T \nvdash G$ であるので $\mathbb{N} \models G$ である．すなわち，G は正しいけれども証明できない論理式になっている．しかしここで注意しなければならないことは，G が真であるとわかるのは T が無矛盾であるとわかっている場合に限るということである．T は矛盾しているか無矛盾であるかのどちらかであるが，たとえ実際に

[*9] s の解釈を恒等写像とすることで T のモデル (model) が構成できることによる．

[*10] Gödel の完全性定理 (completeness theorem) における 1 階述語論理の完全性と区別するため，「否定完全」とか「統語論的に完全」とかいうこともある．

は無矛盾であったとしても，それが示されていないならば，G が真である保証は何もない．

注意 6.10. 第一不完全性定理の証明に際しては，PA の帰納法の公理は使われていない．したがって，PA から帰納法の公理を除いた理論でも第一不完全性定理は成り立つ．PA から帰納法の公理を除いた理論を Robinson 算術といい，Q と書くことが多い．

PA の無矛盾な拡大はすべて不完全というわけではない．

例 6.11 (無矛盾かつ完全な体系その 1). TA $:= \{\varphi \in \mathrm{Fml} \mid \varphi$: 閉論理式$, \mathbb{N} \models \varphi\}$ とおき，**真の算術** (true arithmetic) という．明らかに TA は PA の無矛盾な拡大であり，かつ完全である．したがって第一不完全性定理より TA は PA の計算可能拡大ではない．すなわち，任意に論理式 φ が与えられたとき，φ が真であるかどうかを判定するアルゴリズムは存在しない．さらに，Rosser の定理 6.8 から TA は RE 拡大でさえないので，正しい論理式を全て列挙するアルゴリズムですら存在しないことがわかる．

また，最初に不完全性定理は「ある程度の算術を扱える体系」に対して成り立つと述べたが，その前提を満たさない場合には無矛盾かつ完全になる場合がある．

事実 6.12 (無矛盾かつ完全な体系その 2). 算術の言語 $\{<, 0, \mathrm{s}, +, \times\}$ から乗算記号 $\times$ を取り除き，また PA から $\times$ に関する公理を除いた体系・理論を Presburger 算術という．Presburger 算術は無矛盾かつ完全であることが知られている．証明は萩谷・西崎 [6]，Sipser [9] などを参照のこと．

実は第二不完全性定理を成り立たせるには，Prov_T が $\mathbf{Prov}_T$ を表現しているだけでは不十分であり，Pr_T が “自然に” 形式化されていなければならない．具体的には，Pr_T に次の条件を課す．

定義 6.13 (導出可能性条件). 次の 3 条件を**導出可能性条件** (derivability conditions) という．

(D1) $T \vdash \varphi$ ならば $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$.
(D2) $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi \to \psi\urcorner}) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\psi\urcorner})$.
(D3) $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})\urcorner})$.

この 3 条件を満たす述語 Pr_T を**標準的な証明可能性述語** (standard provability predicate) という．

(D1) は定理 5.7 そのものである．

Pr_T が (D1)，(D2)，(D3) を満たすように取れることを示すには，具体的に Pr_T を構成してみせる他はない．詳細は新井 [2]，鹿島 [1]，Boolos [4] などを参照のこと．特に (D3) については，3 節の議論を PA の中で行う必要があるため膨大な作業を強いられる．ここで PA の帰納法の公理が必要になる．

以下，Pr_T は (D1)，(D2)，(D3) を満たすとする．

定義 6.14. $\mathrm{Con}(T) :\equiv \neg\,\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\bot\urcorner})$ と定義する．$\mathrm{Con}(T)$ は T の無矛盾性を表す文である．

以下では，導出可能性条件を用いて第二不完全性定理を証明する．

補題 6.15. 理論 T を PA の RE 拡大とするとき，次が成り立つ．

(1) $T \vdash \varphi \to \psi$ ならば $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\psi\urcorner})$.
(2) $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}) \land \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\psi\urcorner}) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi \land \psi\urcorner})$.

証明. (1) $T \vdash \varphi \to \psi$ とすると，(D1) から $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner})$ となる．よって演繹定理と (D2) から $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \psi \urcorner})$ を得る．

(2) $\varphi \to \psi \to \varphi \wedge \psi$ が **HK** の公理だけから証明できるので, (1) から $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \psi \to \varphi \wedge \psi \urcorner})$ となる．一方 (D2) から $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \psi \to \varphi \wedge \psi \urcorner}) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \varphi \wedge \psi \urcorner})$ なので，演繹定理と合わせて結論を得る． □

定理 6.16 (第二不完全性定理, second incompleteness theorem). T が PA の無矛盾な RE 拡大ならば $T \nvdash \mathrm{Con}(T)$ である．

証明. G を Gödel 文とする．(D3) より $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner G \urcorner}) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner G \urcorner}) \urcorner})$ である．また G の定義より $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner G \urcorner}) \to \neg G$ であるので，補題 6.15 の (1) から $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner G \urcorner}) \urcorner}) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \neg G \urcorner})$ である．よってこれら 2 つから $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner G \urcorner}) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \neg G \urcorner})$ を得る．したがって演繹定理などから $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner G \urcorner}) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner G \urcorner}) \wedge \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \neg G \urcorner})$ となるが, $G \wedge \neg G \to \bot$ が **HK** の公理だけから証明できるので, 補題 6.15 の (1) と (2) により $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner G \urcorner}) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \bot \urcorner})$ を得る．対偶を取って $T \vdash \mathrm{Con}(T) \to \neg \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner G \urcorner})$ となる．よって G の定義から $T \vdash \mathrm{Con}(T) \to G$ であるが，第一不完全性定理から $T \nvdash G$ だったので $T \nvdash \mathrm{Con}(T)$ でなければならない． □

注意 6.17. PA の無矛盾な拡大であっても，偽である閉論理式を証明することがある．実際，$T := \mathsf{PA} + \neg \mathrm{Con}(\mathsf{PA})$ とおくと第二不完全性定理から T は無矛盾であるが, [*11] PA は無矛盾であるので $\neg \mathrm{Con}(\mathsf{PA})$ は正しくない．さらに $\neg \mathrm{Con}(\mathsf{PA})$ $(\leftrightarrow \mathrm{Pr}_{\mathsf{PA}}(\overline{\ulcorner \bot \urcorner}))$ は Σ_1 文であるから，T は無矛盾だけれども Σ_1 健全ではない理論の例になっている．

また，第二不完全性定理は $T \nvdash \mathrm{Con}(T)$ とは言っているが，$T \vdash \neg \mathrm{Con}(T)$ となる可能性は排除していない．実際，もし PA が矛盾する $(\neg \mathrm{Con}(\mathsf{PA}))$ ならばその拡大 $\mathsf{PA} + \neg \mathrm{Con}(\mathsf{PA})$ も矛盾するが，これは PA にも証明できるので演繹定理より $\mathsf{PA} + \neg \mathrm{Con}(\mathsf{PA}) \vdash \neg \mathrm{Con}(\mathsf{PA} + \neg \mathrm{Con}(\mathsf{PA}))$ となる．このことから，自身が矛盾することを証明するからといって実際に矛盾しているとは限らないことがわかる．

7 終わりに

本稿を書くにあたり，鹿島 [1]，新井 [2]，フランセーン [16] を大いに参考にした．本稿で用いている記号や定義は特定の文献のものではなく，いくつかの文献のものを混ぜて使っている．

本稿では計算理論や証明可能性述語の構成などはあえて詳しく説明を行わなかった．計算理論については高橋 [7, 8]，Sipser [9]，新井 [2]，萩谷・西崎 [6] などを，証明可能性述語の構成などは新井 [2]，Boolos [4]，あるいは結城 [14] などを参照されたい．また証明体系についても Hilbert 流のものしか紹介しなかったが，その他の証明体系 (自然演繹，シーケント計算，導出原理，タブロー，組み合わせ論理など) に興味のある方には小野 [10]，戸次 [11]，古森・小野 [12]，萩谷・西崎 [6] などをお勧めしておく．

不完全性定理の証明が載っている初学者向けの入門書としては鹿島 [13] を挙げておく．ただしこの本でも計算可能性の正確な定義は省略されている．不完全性定理に限らない数学基礎論一般の入門書としてはキューネン [5] が評判が高い．

専門書ではない一般向けの本としては結城 [14]，照井 [15]，フランセーン [16] などを挙げておく．特にフ

[*11] もし矛盾したとすれば $T \vdash \bot$ だから演繹定理より $\mathsf{PA} \vdash \neg\neg \mathrm{Con}(\mathsf{PA})$ となり，第二不完全性定理に反する．

ランセーンの本は不完全性定理の証明を一度見た後で読むと得るものが多いと思う．

発表の場を作って頂いた都数の方々にこの場を借りて御礼申し上げる．読者諸氏が不完全性定理について学ぶとき，本稿がその理解の一助となれば幸いである．

参考文献

[1] 鹿島亮. 第一不完全性定理と第二不完全性定理. 田中一之 (編). ゲーデルと 20 世紀の論理学（ロジック） ③ 不完全性定理と算術の体系. pp. 37–113, 東京大学出版会, 2007.

[2] 新井敏康. 数学基礎論. 岩波書店, 2011.

[3] 菊池誠. 不完全性定理. 共立出版, 2014.

[4] G. Boolos. *The Logic of Provability.* Cambridge University Press, 1993.

[5] ケネス・キューネン (藤田博司訳). キューネン数学基礎論講義. 日本評論社, 2016.

[6] 萩谷昌己・西崎真也. 論理と計算のしくみ. 岩波書店, 2007.

[7] 高橋正子. 計算論 計算可能性とラムダ計算. 近代科学社, 1991.

[8] 高橋正子. コンピュータと数学. 朝倉書店, 2016.

[9] M. Sipser (太田和夫・田中圭介監訳). 計算理論の基礎 2 計算可能性の理論. 共立出版, 2008.

[10] 小野寛晰. 情報科学における論理. 日本評論社, 1994.

[11] 戸次大介. 数理論理学. 東京大学出版会, 2012.

[12] 古森雄一・小野寛晰. 現代数理論理学序説. 2010.

[13] 鹿島亮. 数理論理学. 朝倉書店, 2009.

[14] 結城浩. 数学ガール／ゲーデルの不完全性定理. ソフトバンククリエイティブ, 2009.

[15] 照井一成. コンピュータは数学者になれるのか？　数学基礎論から証明とプログラムの理論へ. 青土社, 2015.

[16] トルケル・フランセーン (田中一之訳). ゲーデルの定理 利用と誤用の不完全ガイド. みすず書房, 2011.