幾何学演習 A
問題 B.12.6 の反例と解答

2016 年 1 月 29 日

問題 B.12.6

X を位相空間，$\pi\colon X \to X/{\sim}$ を商写像とする．π が閉写像であるならば，以下は同値であることを示せ．

(i) X はコンパクト空間である．

(ii) 商空間 $X/{\sim}$ はコンパクト空間であり，X の任意の点の同値類は X のコンパクト部分集合である．

1 (i) $\Longrightarrow$ (ii) の反例

$X := \mathbb{N} \cup \{-1\}$ とし，X の位相を $\mathcal{U} := \mathcal{P}(\mathbb{N}) \cup \{X\}$ で定める．-1 を元として含む X の開集合は X しかないから，X は明らかにコンパクト空間であるので (i) が成り立つ．

X 上の同値関係 $\sim$ を

$$x \sim y :\Longleftrightarrow x, y \in \mathbb{N} \text{ または } x = y = -1$$

で定めると $X/{\sim} = \{\mathbb{N}, \{-1\}\}$ となる．

π が閉写像であることを示す．$\pi^{-1}(\{\mathbb{N}\}) = \mathbb{N} \in \mathcal{U}$ より $(X/{\sim}) \setminus \{\mathbb{N}\} = \{\{-1\}\}$ は $X/{\sim}$ の閉集合である．$\{\mathbb{N}\} \subset X/{\sim}$ は閉集合ではないが，X の空でない閉集合は必ず -1 を元として含むので π により $\{\mathbb{N}\}$ にうつる X の閉集合はない．よって π は閉写像である．

最後に，同値類 $\mathbb{N} \subset X$ に X からの相対位相を入れると離散位相になるので，$\mathbb{N}$ は X のコンパクト部分集合ではないから (ii) は成り立たない．$\square$

X にハウスドルフ性を課した場合には 1 点集合が閉集合となるから (i) $\Longrightarrow$ (ii) が成り立つのは明らかであろう．

2 (ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明

$X, X/\sim$ の位相をそれぞれ $\mathcal{U}_X, \mathcal{U}_{X/\sim}$ とおく．まず，次の補題を証明する．

任意の $y \in X/\sim$ と $\pi^{-1}(y) \subset U$ をみたす任意の $U \in \mathcal{U}$ に対し，ある $W \in \mathcal{U}_{X/\sim}$ が存在して $y \in W, \pi^{-1}(W) \subset U$ が成り立つ．

補題の証明

任意の $y \in X/\sim$ と $\pi^{-1}(y) \subset U$ をみたす任意の $U \in \mathcal{U}$ をとる．π が閉写像であることより $\pi(U^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}} \in \mathcal{U}_{X/\sim}$ となる．$W := \pi(U^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}}$ とおく．$y \in W$ と $\pi^{-1}(W) \subset U$ を示す．

- $y \in W$
  $\pi^{-1}(y) \subset U$ より $U^{\mathrm{c}} \subset \pi^{-1}(y)^{\mathrm{c}}$ だから任意の $x \in U^{\mathrm{c}}$ について $\pi(x) \neq y$ なので $y \notin \pi(U^{\mathrm{c}})$ である．よって $y \in \pi(U^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}} = W$ となる．
- $\pi^{-1}(W) \subset U$
  任意の $z \in \pi^{-1}(W)$ をとると，$\pi(z) \in W = \pi(U^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}}$ であるから $\pi(z) \notin \pi(U^{\mathrm{c}})$ より $z \notin U^{\mathrm{c}}$，よって $z \in U$ である．$\square$

X の任意の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ をとる．X の各同値類 $y \in X/\sim$ は X のコンパクト部分集合だからある有限部分集合 $A_y \subset A$ が存在して $y = \pi^{-1}(y) \subset \bigcup_{\alpha \in A_y} U_\alpha$ となる．よって補題より各 $y \in X/\sim$ に対してある $W_y \in \mathcal{U}_{X/\sim}$ が存在して $y \in W_y, \pi^{-1}(W_y) \subset \bigcup_{\alpha \in A_y} U_\alpha$ が成り立つ．$\{W_y\}_{y \in X/\sim}$ は $X/\sim$ の開被覆で，$X/\sim$ がコンパクトであったことより，$X/\sim$ は有限個の $W_{y(1)}, \ldots, W_{y(n)}$ で被覆される．よって $X/\sim = \bigcup_{1 \leq i \leq n} W_{y(i)}$ の両辺の逆像をとれば $X = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \pi^{-1}(W_{y(i)}) \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} \bigcup_{\alpha \in A_{y(i)}} U_\alpha$ となるから X はコンパクトである．$\square$

参考文献

[1] http://isites.harvard.edu/fs/docs/icb.topic98903.files/Assignment_4/131soln4a.pdf